

TRƯỜNG THPT LƯƠNG THẾ VINH - QUẢNG BÌNH

GV: NGUYỄN HOÀNG VIỆT

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 10

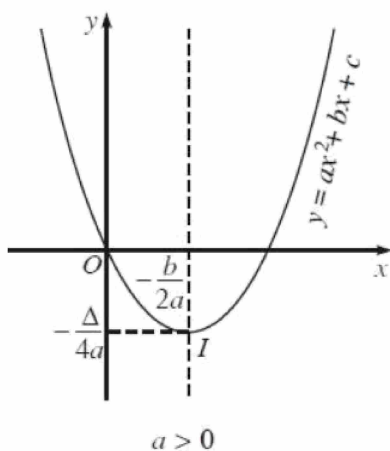
MÔN TOÁN

Đại Số

Tài liệu tham khảo dành cho giáo viên và học sinh

Lưu hành nội bộ trong đội ngũ Giáo viên giao lưu

và chia sẻ kinh nghiệm giảng dạy cùng thầy Việt



Dễ hiểu, dễ nhớ

Kiến thức trọng tâm

Bài tập đa dạng, phong phú

LƯU HÀNH NỘI BỘ

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 10

MỤC LỤC

Chương 1. MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP	1
§1 – MỆNH ĐỀ	1
(A) Tóm tắt lí thuyết	1
(B) Các dạng toán	3
Dạng 1. Mệnh đề có nội dung đại số và số học	3
Dạng 2. Mệnh đề có nội dung hình học	9
Dạng 3. Thành lập mệnh đề - Mệnh đề phủ định	12
§2 – TẬP HỢP	17
(A) Tóm tắt lí thuyết	17
(B) Các dạng toán	18
Dạng 1. Xác định tập hợp - phần tử của tập hợp	18
Dạng 2. Tập hợp rỗng	22
Dạng 3. Tập con. Tập bằng nhau	24
§3 – CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP	31
(A) Tóm tắt lí thuyết	31
(B) Các dạng toán	32
Dạng 1. Tìm giao và hợp của các tập hợp	32
Dạng 2. Hiệu và phần bù của hai tập hợp	35
Dạng 3. Sử dụng biểu đồ Ven và công thức tính số phần tử của tập hợp $A \cup B$ để giải toán	37
§4 – CÁC TẬP HỢP SỐ	45
(A) Tóm tắt lí thuyết	45
(B) Các dạng toán	46
Dạng 1. Xác định giao - hợp của hai tập hợp	46
Dạng 2. Xác định hiệu và phần bù của hai tập hợp	51
Dạng 3. Tìm m thỏa điều kiện cho trước	54
§5 – ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG I	60
(A) Đề số 1a	60
(B) Đề số 1b	60
(C) Đề số 2a	61
(D) Đề số 2b	63

(E)	Đề số 3a.....	64
(F)	Đề số 3b.....	66
(G)	Đề số 4a.....	67
(H)	Đề số 4b.....	69

Chương 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI 72

§1 – ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ 72

(A)	Tóm tắt lí thuyết.....	72
(B)	Các dạng toán.....	73
	<i>📁 Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số.....</i>	73
	<i>📁 Dạng 2. Tính giá trị của hàm số tại một điểm.....</i>	75
	<i>📁 Dạng 3. Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số.....</i>	77
	<i>📁 Dạng 4. Tính đơn điệu của hàm bậc nhất.....</i>	82
	<i>📁 Dạng 5. Xét tính chẵn lẻ của hàm số.....</i>	86

§2 – HÀM SỐ $Y = AX + B$ 90

(A)	Tóm tắt lí thuyết.....	90
(B)	Các dạng toán.....	90
	<i>📁 Dạng 1. Vẽ đồ thị hàm số bậc nhất.....</i>	90
	<i>📁 Dạng 2. Xác định hệ số a và b của số bậc nhất.....</i>	93
	<i>📁 Dạng 3. Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số bậc nhất có chứa giá trị tuyệt đối.....</i>	96
	<i>📁 Dạng 4. Vẽ đồ thị hàm số cho bởi hệ nhiều công thức.....</i>	99
	<i>📁 Dạng 5. Sự tương giao giữa các đường thẳng.....</i>	102

§3 – HÀM SỐ BẬC HAI 107

(A)	Tóm tắt lí thuyết.....	107
(B)	Các dạng toán.....	109
	<i>📁 Dạng 1. Vẽ đồ thị và lập bảng biến thiên của hàm số bậc hai.....</i>	109
	<i>📁 Dạng 2. Tìm tọa độ của đỉnh và các giao điểm của parabol với các trục tọa độ. Tọa độ giao điểm giữa parabol (P) và một đường thẳng.....</i>	113
	<i>📁 Dạng 3. Dựa vào đồ thị biện luận theo m số giao điểm của parabol (P) và đường thẳng.....</i>	115
	<i>📁 Dạng 4. Xác định hàm số bậc hai khi biết các yếu tố liên quan.....</i>	117
	<i>📁 Dạng 5. Các bài toán liên quan đồ thị hàm số trị tuyệt đối của một hàm bậc hai.....</i>	122
	<i>📁 Dạng 6. Các bài toán liên quan đồ thị hàm số đối với trị tuyệt đối của biến.....</i>	123
	<i>📁 Dạng 7. Tính đơn điệu của hàm bậc hai.....</i>	124

§4 – ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG II 130

(A)	Đề số 1a.....	130
(B)	Đề số 1b.....	132
(C)	Đề số 2a.....	134
(D)	Đề số 2b.....	137

(E)	Đề số 3a.....	139
(F)	Đề số 3b.....	140
(G)	Đề số 4a.....	142
(H)	Đề số 4b.....	145
(I)	Đề số 5a.....	148
(J)	Đề số 5b.....	150
Chương 3.	PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH	153
§1 –	MỞ ĐẦU VỀ PHƯƠNG TRÌNH	153
(A)	Tìm tập xác định của phương trình.....	153
📁	Dạng 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình.....	153
(B)	Phương trình hệ quả.....	158
📁	Dạng 2. Khử mẫu (nhân hai vế với biểu thức).....	159
📁	Dạng 3. Bình phương hai vế (làm mất căn).....	162
(C)	Phương trình tương đương.....	166
📁	Dạng 4. Phương pháp chứng minh hai phương trình tương đương.....	166
📁	Bài tập tổng hợp.....	170
§2 –	PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI	175
(A)	Tóm tắt lí thuyết.....	175
(B)	Các dạng toán.....	175
📁	Dạng 1. Giải và biện luận phương trình bậc nhất.....	175
📁	Dạng 2. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn.....	179
📁	Dạng 3. Phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối.....	186
📁	Dạng 4. Phương trình chứa ẩn ở mẫu. Phương trình bậc bốn trùng phương.....	194
📁	Dạng 5. Biện luận theo m có áp dụng định lí Viète.....	199
📁	Bài tập tổng hợp.....	203
§3 –	PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN	211
(A)	Tóm tắt lí thuyết.....	211
(B)	Các dạng toán.....	212
📁	Dạng 1. Giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đại số.....	212
📁	Dạng 2. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn.....	217
📁	Dạng 3. Giải và biện luận hệ 2 phương trình bậc nhất 2 ẩn có chứa tham số (PP Crame).....	222
§4 –	HỆ PHƯƠNG TRÌNH HAI ẨN	230
(A)	Hệ phương trình gồm các phương trình bậc nhất và bậc hai.....	230
(B)	Hệ phương trình đối xứng loại 1.....	233
(C)	Hệ phương trình đối xứng loại 2.....	237
📁	Dạng 1. Giải hệ phương trình đối xứng loại 2.....	237
📁	Dạng 2. Tìm điều kiện của tham số thỏa điều kiện cho trước.....	239

	Ⓓ	Hệ phương trình đẳng cấp.....	243
	Ⓔ	Hệ phương trình hai ẩn khác.....	249
§5 –		ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG III	260
	Ⓐ	Đề số 1a.....	260
	Ⓑ	Đề số 1b.....	261
	Ⓒ	Đề số 2a.....	262
	Ⓓ	Đề số 2b.....	264
	Ⓔ	Đề số 3a.....	266
	Ⓕ	Đề số 3b.....	267
Chương 4.		BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH	270
§1 –		BẤT ĐẲNG THỨC	270
	Ⓐ	Tóm tắt lí thuyết.....	270
	Ⓑ	Các dạng toán.....	271
		📁 Dạng 1. Sử dụng phép biến đổi tương đương.....	271
		📁 Dạng 2. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si.....	274
		📁 Dạng 3. Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki.....	282
		📁 Dạng 4. Sử dụng các bất đẳng thức hệ quả.....	283
		📁 Dạng 5. Chứng minh bất đẳng thức dựa vào tọa độ véc-tơ.....	285
		📁 Dạng 6. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối.....	286
§2 –		BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN	288
	Ⓐ	Tóm tắt lí thuyết.....	288
	Ⓑ	Các dạng toán.....	288
		📁 Dạng 1. Giải bất phương trình bậc nhất một ẩn.....	289
		📁 Dạng 2. Giải và biện luận bất phương trình bậc nhất một ẩn.....	294
		📁 Dạng 3. Tìm giá trị của tham số để bất phương trình có tập nghiệm thỏa điều kiện cho trước.....	296
		📁 Dạng 4. Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn.....	298
		📁 Dạng 5. Giải và biện luận hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn.....	300
		📁 Dạng 6. Tìm giá trị của tham số để hệ bất phương trình có tập nghiệm thỏa điều kiện cho trước.....	303
§3 –		DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT	308
	Ⓐ	Tóm tắt lí thuyết.....	308
	Ⓑ	Các dạng toán.....	310
		📁 Dạng 1. Xét dấu tích - thương các nhị thức bậc nhất.....	310
		📁 Dạng 2. Xét dấu nhị thức có chứa tham số.....	315
		📁 Dạng 3. Giải bất phương trình tích.....	321
		📁 Dạng 4. Giải bất phương trình chứa ẩn ở mẫu thức.....	323
		📁 Dạng 5. Giải bất phương trình bậc nhất chứa dấu giá trị tuyệt đối.....	327

§4 –	BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN	338
(A)	Tóm tắt lí thuyết.....	338
(B)	Các dạng toán.....	338
	<i>📁 Dạng 1. Biểu diễn tập nghiệm bất phương trình bậc nhất hai ẩn.....</i>	338
	<i>📁 Dạng 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.....</i>	341
	<i>📁 Dạng 3. Các bài toán thực tiễn.....</i>	344
§5 –	DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI	355
(A)	Tóm tắt lí thuyết.....	355
(B)	Các dạng toán.....	355
	<i>📁 Dạng 1. Xét dấu tam thức bậc hai.....</i>	355
	<i>📁 Dạng 2. Tìm điều kiện của tham số để tam thức bậc hai luôn mang một dấu.....</i>	358
	<i>📁 Dạng 3. Giải bất phương trình bậc hai.....</i>	360
	<i>📁 Dạng 4. Bài toán có chứa tham số.....</i>	367
§6 –	ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG IV	372
(A)	Đề số 1a.....	372
(B)	Đề số 1b.....	373
(C)	Đề số 2a.....	374
(D)	Đề số 2b.....	376
(E)	Đề số 3a.....	377
(F)	Đề số 3b.....	378
(G)	Đề số 4a.....	379
(H)	Đề số 4b.....	380
Chương 5.	THỐNG KÊ	383
§1 –	BẢNG PHÂN BỐ TẦN SỐ VÀ TẦN SUẤT	383
(A)	Tóm tắt lí thuyết.....	383
(B)	Các dạng toán.....	383
	<i>📁 Dạng 1. Bảng phân bố tần số và tần suất.....</i>	383
	<i>📁 Dạng 2. Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp.....</i>	386
§2 –	BIỂU ĐỒ	392
(A)	Tóm tắt lí thuyết.....	392
(B)	Các dạng toán.....	393
	<i>📁 Dạng 1. Vẽ biểu đồ tần số và tần suất hình cột.....</i>	393
	<i>📁 Dạng 2. Biểu đồ đường gấp khúc.....</i>	397
	<i>📁 Dạng 3. Biểu đồ hình quạt.....</i>	402
§3 –	SỐ TRUNG BÌNH CỘNG. SỐ TRUNG VỊ. MÔT	406
(A)	Tóm tắt lí thuyết.....	406

	📁 Dạng 4. Chứng minh đẳng thức lượng giác.....	478
	ⓓ Công thức biến đổi.....	481
	📁 Dạng 5. Biến đổi một biểu thức thành một tổng hoặc thành một tích.....	481
	📁 Dạng 6. Chứng minh một đẳng thức lượng giác có sử dụng nhóm công thức biến đổi.....	485
	📁 Dạng 7. Dùng công thức biến đổi để tính giá trị (rút gọn) của một biểu thức lượng giác.....	490
	📁 Dạng 8. Nhận dạng tam giác. Một số hệ thức trong tam giác.....	495
§4 –	ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG VI	510
	Ⓐ Đề số 1a.....	510
	Ⓑ Đề số 1b.....	511
	Ⓒ Đề số 2a.....	513
	Ⓓ Đề số 2b.....	514
	Ⓔ Đề số 3a.....	517
	Ⓕ Đề số 3b.....	519
	Ⓖ Đề số 4a.....	521
	Ⓗ Đề số 4b.....	523
	Ⓘ Đề số 5a.....	524
	Ⓙ Đề số 5b.....	525



MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

BÀI 1. MỆNH ĐỀ

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Mệnh đề

⇔ **Định nghĩa 1.1.** Mệnh đề logic (gọi tắt là mệnh đề) là một câu khẳng định **hoặc đúng hoặc sai**.

- ☉ Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.
- ☉ Một câu khẳng định đúng gọi là **mệnh đề đúng**. Một câu khẳng định sai gọi là **mệnh đề sai**.

⚠ Những điểm cần lưu ý.

- ☉ Các câu hỏi, câu cảm thán, câu mệnh lệnh không phải là mệnh đề.
- ☉ Mệnh đề thường được kí hiệu bằng các chữ cái in hoa.
Ví dụ: Q : “6 chia hết cho 3”.
- ☉ Một câu mà chưa thể nói đúng hay sai nhưng chắc chắn nó chỉ đúng hoặc sai, không thể vừa đúng vừa sai cũng là một mệnh đề.
Ví dụ: “Có sự sống ngoài Trái Đất” là mệnh đề.
- ☉ Trong thực tế, có những mệnh đề mà tính đúng sai của nó luôn gắn với một thời gian và địa điểm cụ thể: đúng ở thời gian hoặc địa điểm này nhưng sai ở thời gian hoặc địa điểm khác. Nhưng ở bất kì thời điểm nào, địa điểm nào cũng luôn có giá trị chân lí đúng hoặc sai.
Ví dụ: Sáng nay bạn An đi học.

2. Mệnh đề chứa biến

⇔ **Định nghĩa 1.2.** Những câu khẳng định mà tính **đúng-sai** của chúng tùy thuộc vào giá trị của biến gọi là những **mệnh đề chứa biến**.

Ví dụ: Cho $P(x) : x > x^2$ với x là số thực. Khi đó $P(2)$ là mệnh đề sai, $P\left(\frac{1}{2}\right)$ là mệnh đề đúng.

3. Mệnh đề phủ định

⇔ **Định nghĩa 1.3.** Cho mệnh đề P . Mệnh đề “**Không phải P** ” được gọi là mệnh đề phủ định của P và kí hiệu là \bar{P} .

- ☉ Mệnh đề P và mệnh đề phủ định \bar{P} là hai câu khẳng định trái ngược nhau. Nếu P đúng thì \bar{P} sai, nếu P sai thì \bar{P} đúng.
- ☉ Mệnh đề phủ định của P có thể diễn đạt theo nhiều cách khác nhau. Chẳng hạn, xét mệnh đề P : “2

là số chẵn”. Khi đó, mệnh đề phủ định của P có thể phát biểu là \bar{P} : “2 không phải là số chẵn” hoặc “2 là số lẻ”.

4. Mệnh đề kéo theo và mệnh đề đảo

↔ **Định nghĩa 1.4.** Cho hai mệnh đề P và Q . Mệnh đề “Nếu P thì Q ” được gọi là **mệnh đề kéo theo**.

- ✔ Kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.
- ✔ Mệnh đề kéo theo chỉ sai khi P đúng Q sai.
- ✔ $P \Rightarrow Q$ còn được phát biểu là “ P kéo theo Q ”, “ P suy ra Q ” hay “Vì P nên Q ”.

⚠ **Chú ý**

- ✔ Trong toán học, định lí là một mệnh đề đúng, thường có dạng: $P \Rightarrow Q$. Khi đó ta nói P là giả thiết, Q là kết luận của định lí, hoặc P là điều kiện đủ để có Q , hoặc Q là điều kiện cần để có P .
- ✔ Trong logic toán học, khi xét giá trị chân lí của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ người ta không quan tâm đến mối quan hệ về nội dung của hai mệnh đề P, Q . Không phân biệt trường hợp P có phải là nguyên nhân để có Q hay không mà chỉ quan tâm đến tính đúng, sai của chúng.

Ví dụ: “Nếu mặt trời quay quanh trái đất thì Việt Nam nằm ở châu Âu” là một mệnh đề đúng. Vì ở đây hai mệnh đề P : “Mặt trời quay xung quanh trái đất” và Q : “Việt Nam nằm ở châu Âu” đều là mệnh đề sai.

↔ **Định nghĩa 1.5.** Cho mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là **mệnh đề đảo** của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

⚠ **Mệnh đề đảo của một mệnh đề đúng không nhất thiết là một mệnh đề đúng.**

5. Mệnh đề tương đương

↔ **Định nghĩa 1.6.** Cho hai mệnh đề P và Q . Mệnh đề có dạng “ P nếu và chỉ nếu Q ” được gọi là mệnh đề tương đương.

- ✔ Kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$
- ✔ Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ cùng đúng hoặc cùng sai. (Hay $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi cả hai mệnh đề P và Q cùng đúng hoặc cùng sai)
- ✔ $P \Leftrightarrow Q$ còn được phát biểu là “ P khi và chỉ khi Q ”, “ P tương đương với Q ”, hay “ P là điều kiện cần và đủ để có Q ”.

⚠ Hai mệnh đề P, Q tương đương với nhau hoàn toàn không có nghĩa là nội dung của chúng như nhau, mà nó chỉ nói lên rằng chúng có cùng giá trị chân lí (cùng đúng hoặc cùng sai).

Ví dụ: “Hình vuông có một góc tù khi và chỉ khi 100 là số nguyên tố” là một mệnh đề đúng.

6. Các kí hiệu \forall và \exists

- ✔ Kí hiệu \forall (với mọi): “ $\forall x \in X, P(x)$ ” hoặc “ $\forall x \in X : P(x)$ ”.
- ✔ Kí hiệu \exists (tồn tại): “ $\exists x \in X, P(x)$ ” hoặc “ $\exists x \in X : P(x)$ ”.

⚠ **Chú ý**

- ✔ Phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in X, P(x)$ ” là mệnh đề “ $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ”.

☑ *Phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in X, P(x)$ ” là mệnh đề “ $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ”.*

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Mệnh đề có nội dung đại số và số học

🔗 **Ví dụ 1.** Tìm mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

- a) A : “ $\sqrt{6}$ là số hữu tỉ”.
- b) B : “ n chia hết cho 3 và 5 thì n chia hết cho 15”.
- c) C : “ $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 + x + 3 > 0$ ”.
- d) D : “ $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{R} : \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2$ ”.

 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 2.** Xét tính đúng - sai của các mệnh đề sau và tìm mệnh đề phủ định của nó:

- a) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 6 > 0$.
- b) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 = 0$.
- c) $\exists x \in \mathbb{R} : x > x^2$.

 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 3.** Điều chỉnh các mệnh đề sau để được các mệnh đề đúng:


- a) $\forall x \in \mathbb{R} : 3x - 1 = 0$.
- b) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x = 0$.

c) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 < 0.$

d) $\forall x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{x}.$

 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

 **Ví dụ 4.** Chứng minh “Nếu n^2 là số chẵn thì n là số chẵn.”

 Lời giải.

.....
.....
.....
.....

 **Ví dụ 5.** Chứng minh rằng:


a) Với mọi số nguyên n thì $n^3 - n$ chia hết cho 3.

b) Với mọi số nguyên n thì $n(n - 1)(2n - 1)$ chia hết cho 6.

 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

 **Bài 1.** Hãy xét tính đúng - sai của các mệnh đề sau đây và tìm mệnh đề phủ định của chúng:


a) $A : “\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 1”.$

b) $B : “\exists x \in \mathbb{Z} : 6x^2 - 13x + 6 = 0”.$

c) $C : “\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : y = x + 2”$.

d) $D : “\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 0”$.

 Lời giải.

 **Bài 2.** Xét tính đúng - sai của các mệnh đề sau. Nếu mệnh đề sai hãy sửa lại cho đúng:

a) $\forall x \in \mathbb{R} : x > 4 \Rightarrow x > 16$.

b) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 36 \Rightarrow x > 6$.

c) $\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 0$.

d) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : \begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Leftrightarrow a > c$.

e) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : \begin{cases} a : 3 \\ b : 2 \end{cases} \Leftrightarrow ab : 6$.

 Lời giải.

⌘ Bài 4. Chứng minh rằng $\forall a, b > 0 : \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

💬 Lời giải.

(vô lý).

Vậy $\forall a, b > 0 : \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

⌘ Bài 5.

- Nếu $a + b < 2$ thì một trong hai số a và b nhỏ hơn 1.
- Nếu $x \neq -1$ và $y \neq -1$ thì $x + y + xy \neq -1$.
- Nếu tích của hai số tự nhiên là một số lẻ thì tổng của chúng là một số chẵn.
- Nếu $x^2 + y^2 = 0$ thì $x = 0$ và $y = 0$.

💬 Lời giải.

⌘ Bài 6. Chứng minh rằng $\begin{cases} |x| < 1 \\ |y| < 1 \end{cases} \Rightarrow |x + y| < |1 + xy|$.

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....

⇔ **Bài 7.** Chứng minh $\sqrt{a} + \sqrt{a+2} < 2\sqrt{a+1}, \forall a > 0$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇔ **Bài 8.** Chứng minh rằng nếu $ac > 2(b+d)$ thì ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm

$$x^2 + ax + b = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + cx + d = 0 \quad (2)$$

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇔ **Bài 9.** Chứng minh khi ta nhốt $n+1$ con gà vào n cái lồng thì có ít nhất 1 lồng chứa ít nhất 2 con gà.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....

⇔ **Bài 10.** Chứng minh với mọi số tự nhiên n :

a) $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9.

b) $n^2 + 11n + 39$ không chia hết cho 49.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

⇨ **Bài 11.** Xét tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

- Hai véc-tơ \vec{a} và \vec{b} cùng hướng với véc-tơ \vec{c} thì \vec{a}, \vec{b} cùng hướng.
- Trong ba véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$ và cùng phương thì có ít nhất hai véc-tơ cùng hướng.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Bài 12.** Xét tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

- Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng có diện tích bằng nhau.
- Một tam giác là tam giác đều khi và chỉ khi nó có một góc bằng 60° và hai đường trung tuyến bằng nhau.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Bài 13.** Xét tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

- Một tứ giác là hình bình hành khi và chỉ khi nó có một cặp cạnh đối song song và bằng nhau.
- Một tứ giác là hình bình hành khi và chỉ khi nó có hai đường chéo bằng nhau.

💬 **Lời giải.**



.....
.....
.....
.....

◀▶ **Bài 14.** Cho tứ giác $ABCD$. Xét hai mệnh đề:

P : “Tứ giác $ABCD$ là hình vuông”.

Q : “Tứ giác $ABCD$ là hình thoi có hai đường chéo bằng nhau”.

Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ bằng hai cách và cho biết mệnh đề đó đúng hay sai.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....

◀▶ **Bài 15.** Xét các tập hợp:

X : tập hợp các tứ giác.

A : Tập hợp các hình vuông.

B : Tập hợp các hình chữ nhật.

D : Tập hợp các hình thoi.

E : Tập hợp các tứ giác có trục đối xứng.

Phát biểu thành lời nội dung các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của chúng.

- $\forall x \in X, x \in B \Rightarrow x \in A$.
- $\forall x \in X, x \in A \Rightarrow x \in D$.
- $\forall x \in X, x \in E \Rightarrow x \in B$.
- $\forall x \in X, x \in D \Rightarrow x \in E$.
- $\exists x \in E: x \notin B$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....

Dạng 3. Thành lập mệnh đề - Mệnh đề phủ định

- Phát biểu thành lời khi cho cho một mệnh đề dạng kí hiệu.
- Dùng kí hiệu \forall, \exists phát biểu một mệnh đề.
- Xét tính Đúng – Sai của các mệnh đề.
- Phủ định một mệnh đề.

↔ **Ví dụ 9.** Phát biểu thành lời các mệnh đề sau đây:

- “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 0$ ”.
- “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < \frac{1}{2}$ ”.
- “ $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x} \geq x$ ”.
- “ $\exists x \in \mathbb{R}, \sqrt{x} > x$ ”.

 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

↔ **Ví dụ 10.** Dùng các kí hiệu \forall, \exists phát biểu các mệnh đề sau:

- Tồn tại một số tự nhiên chia hết cho 9.
- Mọi số không âm đều lớn hơn không.
- Tồn tại một số thực không là số dương cũng không là số âm.

 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....

🔗 **Ví dụ 11.** Xét tính Đúng – Sai của các mệnh đề sau:

- a) “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ ”.
 b) “ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > n$ ”.

💬 Lời giải.

🔗 **Ví dụ 12.** Phủ định các mệnh đề sau đây:

- a) Tất cả bài tập trong sách này đều dễ.
 b) Có ít nhất một hình thang nội tiếp được trong đường tròn.
 c) “ $\exists x \in \mathbb{R}, x + 3 = 5$ ”.
 d) “ $\forall x \in \mathbb{R}, x > 5$ ”.

💬 Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

🔗 **Bài 16.** Phát biểu thành lời các mệnh đề sau đây:

- a) “ $\exists x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x} = x$ ”.
 b) “ $\exists n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} \in \mathbb{N}$ ”.
 c) “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 4x + 8 > 0$ ”.
 d) “ $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 + 5x \leq 0$ ”.

💬 Lời giải.

◇◇ **Bài 17.** Dùng các kí hiệu \forall, \exists phát biểu các mệnh đề sau:

- Có một số tự nhiên khác không mà căn bậc hai của nó thuộc tập số tự nhiên khác không.
- Mọi số nguyên đều là số tự nhiên.
- Có một số tự nhiên không là số nguyên.
- Mọi số tự nhiên đều là số thực.
- Tồn tại một số thực không có nghịch đảo.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◇◇ **Bài 18.** Phủ định các mệnh đề sau:

- Mọi học sinh trong lớp em đều biết dùng máy tính.
- Có một học sinh trong lớp em chưa được leo núi.
- Mọi học sinh trong lớp em không biết đá bóng.
- Có một học sinh trong lớp em thích bóng chuyền.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◇◇ **Bài 19.** Xét xem các mệnh đề sau đúng hay sai và nêu các mệnh đề phủ định của chúng.

- " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 7x + 15 > 0$ ".
- " $\exists x \in \mathbb{R}, x^3 + 2x^2 + 8x + 16 = 0$ ".
- " $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, 2x + 3y = 5$ ".
- " $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 - 2x - 4y = -1$ ".

💬 **Lời giải.**



.....

.....

↔ **Bài 22.** Cho các mệnh đề chứa biến $P(n)$: “ n là số chẵn” và $Q(n)$: “ $7n + 4$ là số chẵn”.

- Phát biểu và chứng minh mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow Q(n)$ ”.
- Phát biểu và chứng minh mệnh đề đảo của mệnh đề ở câu 1.

 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI 2. TẬP HỢP

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tập hợp và phần tử

- ✔ Tập hợp (gọi tắt là tập) là một khái niệm cơ bản của toán học, không định nghĩa.
- ✔ Ta thường dùng các chữ cái in hoa để kí hiệu cho tập hợp.
- ✔ Cho tập hợp A và phần tử x . Nếu x có mặt trong tập A ta nói x là một phần tử của tập A hay x thuộc A , kí hiệu $x \in A$ hoặc $A \ni x$. Nếu x không có mặt trong tập A ta nói x không thuộc A , kí hiệu $x \notin A$ hoặc $A \not\ni x$.

2. Cách xác định tập hợp

- ✔ Liệt kê các phần tử của tập hợp.
- ✔ Chỉ ra các tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

3. Tập hợp rỗng

🔗 **Định nghĩa 2.1.** Tập hợp rỗng, kí hiệu là \emptyset , là tập hợp không chứa phần tử nào.

4. Tập con. Hai tập hợp bằng nhau

- ✔ Tập hợp A gọi là tập con của tập hợp B , kí hiệu $A \subset B$ nếu mọi phần tử của tập hợp A đều thuộc B .
Với kí hiệu đó, ta có $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$
- ✔ Tập rỗng là tập hợp không chứa phần tử nào, kí hiệu là \emptyset .
Qui ước : $\emptyset \subset A$ với mọi tập hợp A .
- ✔ Hai tập hợp A và B gọi là bằng nhau, kí hiệu $A = B$ nếu mỗi phần tử của A là một phần tử của B và ngược lại.
Với định nghĩa đó, ta có $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ và } B \subset A)$

5. Tính chất

🔗 Tính chất 2.1.

- a) $\emptyset \subset A$, với mọi A .
- b) $A \subset A$, với mọi A .
- c) Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$.

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định tập hợp - phần tử của tập hợp

- ✔ Liệt kê các phần tử của tập hợp (giải phương trình nếu cần).
- ✔ Nêu đặc trưng của tập hợp.

⇨ **Ví dụ 1.** Xác định tập hợp A gồm 10 số nguyên tố đầu tiên bằng phương pháp liệt kê

 **Lời giải.**

⇨ **Ví dụ 2.**

- a) Tập hợp A các số thực lớn hơn 1 và nhỏ hơn 3 là $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$.
- b) Tập hợp S gồm các nghiệm của phương trình $x^8 + 9 = 0$ là $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^8 + 9 = 0\}$.

⇨ **Ví dụ 3.** Liệt kê các phần tử của các tập hợp sau:

- a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 5\}$.
- b) B là tập hợp các số tự nhiên lớn hơn 0 và nhỏ hơn 5.
- c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 1)(x + 2) = 0\}$.

 **Lời giải.**

⇨ **Ví dụ 4.** Liệt kê các phần tử của các tập hợp sau:

- a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (2x^2 - 3x + 1)(x + 5) = 0\}$.
- b) $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x^2 - 2)(x^2 - 3x + 2) = 0\}$.

 **Lời giải.**



.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Ví dụ 5.** Viết các tập hợp sau bằng phương pháp liệt kê:

a) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 5)\} = 0$.

b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < n^2 < 40\}$.

c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 9\}$.

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 1| = 5\}$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Ví dụ 6.** Liệt kê các phần tử của mỗi tập hợp sau:

a) Tập hợp A các số chính phương không vượt quá 50.

b) Tập hợp $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n(n + 1) \leq 30\}$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Ví dụ 7.** Viết các tập hợp sau bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.

a) $A = \{0; 4; 8; 12; 16; \dots; 52\}$.

b) $B = \{3; 6; 9; 12; 15; \dots; 51\}$.

c) $C = \{2; 5; 8; 11; 14; \dots; 62\}$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Ví dụ 8.** Viết các tập hợp sau bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.

a) $A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17\}$.

b) $B = \{-2; 4; -8; 16; -32; 64\}$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....

◊ **Ví dụ 9.** Tìm một tính chất đặc trưng xác định các phần tử của mỗi tập hợp sau

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$B = \{0; 7; 14; 21; 28\}$$

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

◊ **Bài 1.** A là tập hợp các số nguyên tố nhỏ hơn 20. Liệt kê các phần tử của tập hợp A.

💬 **Lời giải.**

.....
-------	-------

◊ **Bài 2.** Cho tập hợp $A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$ Hãy xác định tập hợp A bằng cách chỉ ra một tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó.

💬 **Lời giải.**

.....
-------	-------

◊ **Bài 3.** Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước của } 8\}$. Liệt kê các phần tử của tập hợp A.

💬 **Lời giải.**

.....
-------	-------

⇨ **Bài 4.** Cho $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ là ước của } 15\}$. Liệt kê các phần tử của tập hợp A .

🗨️ Lời giải.

⇨ **Bài 5.** Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước chung của } 30 \text{ và } 20\}$.

🗨️ Lời giải.

⇨ **Bài 6.** Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội chung của } 15 \text{ và } 20, x \leq 60\}$.

🗨️ Lời giải.

⇨ **Bài 7.** Viết các tập hợp sau bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.

a) $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

b) $B = \{0; 2; 4; 5; 6; 8\}$.

🗨️ Lời giải.

⇨ **Bài 8.** Tìm một tính chất đặc trưng xác định các phần tử của mỗi tập hợp sau

a) $A = \{0; 2; 7; 14; 23; 34; 47\}$

b) $B = \{-1 + \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}\}$

🗨️ Lời giải.

⇨ **Bài 9.** Liệt kê các phần tử của mỗi tập hợp sau

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 8\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 < |x| < \frac{21}{4}\}$

🗨️ Lời giải.

.....

.....

.....

◀▶ **Bài 10.** Cho tập hợp $X = \{n \in \mathbb{N} \mid -5 < 5n + 2 < 303\}$. Tìm số phần tử của tập hợp X .

💬 Lời giải.

.....

◀▶ **Bài 11.** Liệt kê các phần tử của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - 4x)(x^4 - 6x^2 + 5) = 0\}$.

💬 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

📁 Dạng 2. Tập hợp rỗng

◀▶ **Ví dụ 1.** Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập hợp rỗng?

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + 1 = 0\}.$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 1 = 0\}.$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\}.$$

💬 Lời giải.

.....

◀▶ **Ví dụ 2.** Tìm tất cả các giá trị thực của m để các tập hợp sau là tập hợp rỗng.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < m \text{ và } x > 2m + 1\}.$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + m = 0\}$

💬 Lời giải.

.....

.....

.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

◀▶ **Bài 1.** Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập hợp rỗng?

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - \sqrt{2} = 0\}.$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - \frac{1}{4} = 0\right\}.$$

$$C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 0\}.$$

💬 Lời giải.

⇨ **Bài 2.** Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = m\}$. Tìm m để $A = \emptyset$.

🗨️ Lời giải.

⇨ **Bài 3.** Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để các tập hợp sau là tập hợp rỗng.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < m + 3 \text{ và } x > 4m + 3\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + m + 9 = 0\}$

🗨️ Lời giải.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

⇨ **Bài 1.** Viết tập hợp sau dưới dạng liệt kê các phần tử.

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - 3x + 2)(2x^2 + 3x + 1) = 0\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid |x| < 3\}$.

🗨️ Lời giải.

⇨ **Bài 2.** Tìm tất cả các giá trị của m để tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < m\}$ là tập hợp rỗng.

🗨️ Lời giải.

⇨ **Bài 3.** Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x - m < 3\}$. Tìm tất cả các giá trị của m để $A = \{1\}$.

🗨️ Lời giải.

⇨ **Bài 4.** Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -4 < x < 3\}$. Liệt kê tất cả các phần tử của A .

🗨️ Lời giải.

✧ **Bài 5.** Tìm tất cả các giá trị của m để $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x - m < 3\}$ là tập hợp rỗng.

🗨️ **Lời giải.**

✧ **Bài 6.** Cho tập hợp $A = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}, \text{ với } a, b, c \text{ là các số thực dương} \right\}$. Tìm số nhỏ nhất của tập hợp A .

🗨️ **Lời giải.**

📁 Dạng 3. Tập con. Tập bằng nhau

- ✔ Tập hợp A là tập con của tập hợp B nếu mọi phần tử của A đều có trong B .
 $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$.
- ✔ $\emptyset \subset A$, với mọi tập hợp A .
- ✔ $A \subset A$, với mọi tập hợp A .
- ✔ Có tập A gồm có n phần tử ($n \in \mathbb{N}$). Khi đó, tập A có 2^n tập con.
- ✔ $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$.

✧ **Ví dụ 1.** Tìm tất cả các tập con của tập $A = \{a, 1, 2\}$.

🗨️ **Lời giải.**

✧ **Ví dụ 2.** Tìm tất cả các tập con có 2 phần tử của tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

🗨️ **Lời giải.**

✧ **Ví dụ 3.** Xác định tập hợp X biết $\{1, 2\} \subset X \subset \{1, 2, 5\}$.

🗨️ **Lời giải.**



--	--

⇨ **Ví dụ 4.** Xác định tập hợp X biết $\{a, 1\} \subset X \subset \{a, b, 1, 2\}$.

Lời giải.

--	--

⇨ **Ví dụ 5.** Cho ba tập hợp $A = \{2; 5\}$, $B = \{x; 5\}$ và $C = \{x; y; 5\}$. Tìm các giá trị của x, y sao cho $A = B = C$.

Lời giải.

--	--

⇨ **Ví dụ 6.** Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ chia hết cho } 3 \text{ và } 2\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ chia hết cho } 6\}$. Chứng minh rằng $A = B$.

Lời giải.

--	--

⇨ **Ví dụ 7.** Cho biết x là một phần tử của tập hợp A , xác định tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $x \in A$.

b) $\{x\} \in A$.

c) $x \subset A$.

d) $\{x\} \subset A$.

Lời giải.

--	--

⇔ **Ví dụ 8.** Xác định tất cả các tập hợp con của mỗi tập hợp

a) $A = \{x; y\}$.

b) $B = \{1; 2; 3\}$

🗨️ **Lời giải.**

.....
.....
.....

⇔ **Ví dụ 9.** Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Tìm tất cả các tập con có 3 phần tử của tập hợp A sao cho tổng các phần tử này là một số lẻ.

🗨️ **Lời giải.**

.....
.....
.....

⇔ **Ví dụ 10.** Trong hai tập hợp A và B dưới đây, tập hợp nào là tập con của tập hợp còn lại? Hai tập hợp A và B có bằng nhau không?

a) A là tập hợp các hình chữ nhật
 B là tập hợp các hình bình hành.

b) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là một ước chung của } 12 \text{ và } 18\}$
 $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là một ước của } 6\}$

🗨️ **Lời giải.**

.....
.....
.....

⇔ **Ví dụ 11.** Cho $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là ước của } 2\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 1)(x - 2)(x - 4) = 0\}$. Tìm tất cả các tập hợp X sao cho $A \subset X \subset B$.

🗨️ **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....

⇔ **Ví dụ 12.** Cho $A = \{8k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$; $B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Chứng minh rằng $A \subset B$.

🗨️ **Lời giải.**



.....

.....

.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

✎ **Bài 1.** Tìm tất cả các tập con của mỗi tập hợp sau:

a) $A = \{1; 2\}$.

b) $B = \{a; b; c\}$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

✎ **Bài 2.** Cho các tập hợp

$$A = \{2; 3; 5\};$$

$$B = \{-4; 0; 2; 3; 5; 6; 8\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7x + 10 = 0\}$$

Hãy xác định xem tập nào là tập con của tập còn lại.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

✎ **Bài 3.** Cho hai tập hợp

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x-2)(x-4) = 0\};$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là một ước của } 4\}.$$

Hai tập hợp A và B , tập hợp nào là tập con của tập còn lại? Hai tập hợp A và B có bằng nhau không?

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

✎ **Bài 4.** Cho các tập hợp:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 6 = 0 \text{ hoặc } 3x^2 - 10x + 8 = 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 2 = 0 \text{ và } 2x^2 - 7x + 6 = 0\}.$$

a) Viết tập hợp A, B bằng cách liệt kê các phần tử của nó.

b) Tìm tất cả các tập X sao cho $B \subset X$ và $X \subset A$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....



.....
.....
.....
.....
.....

⇔ **Bài 9.** Tìm tất cả các tập con của tập hợp $B = \{a, b, 2, 5\}$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇔ **Bài 10.** Tìm tất cả các tập con có 3 phần tử của tập hợp $D = \{2, 3, 4, 6, 7\}$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....

⇔ **Bài 11.** Xác định tập hợp X biết $\{a\} \subset X \subset \{a, 3, 4\}$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....

⇔ **Bài 12.** Xác định tập hợp X biết $\{a, 9\} \subset X \subset \{a, b, 7, 8, 9\}$ và tập hợp X có 3 phần tử.

💬 **Lời giải.**

.....
.....

⇔ **Bài 13.** Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ chia hết cho 2 và 5}\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ có chữ số tận cùng bằng 0}\}$. Chứng minh rằng $A = B$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....

⇔ **Bài 14.** Tìm giá trị các tham số m và n sao cho $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - mx^2 + nx - 1 = 0\} = \{1; 2\}$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....

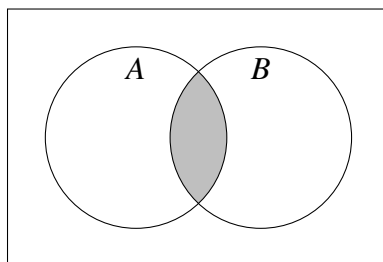
BÀI 3. CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Giao của hai tập hợp

⇨ **Định nghĩa 3.1.** Tập hợp C gồm các phần tử vừa thuộc tập hợp A , vừa thuộc tập hợp B được gọi là giao của A và B . Kí hiệu $C = A \cap B$.

Vậy $A \cap B = \{x | x \in A \text{ và } x \in B\}$.

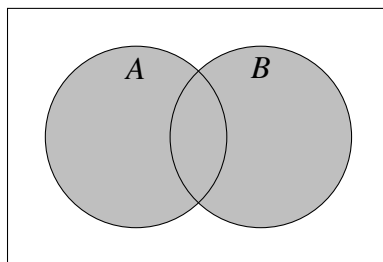


⚠ $x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B. \end{cases}$

2. Hợp của hai tập hợp

⇨ **Định nghĩa 3.2.** Tập hợp C gồm các phần tử thuộc tập hợp A hoặc thuộc tập hợp B được gọi là hợp của A và B . Kí hiệu $C = A \cup B$.

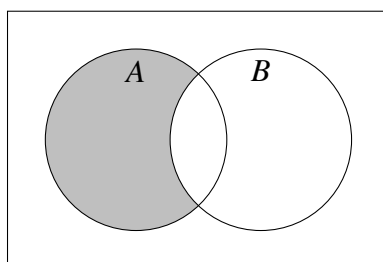
$A \cup B = \{x | x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$.



⚠ $x \in A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B. \end{cases}$

3. Hiệu và phần bù của hai tập hợp

$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ và } x \notin B\}$.



• Phép lấy phần bù: Cho $A \subset E$. Phần bù của A trong E là $\mathcal{C}_E A = E \setminus A$.

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm giao và hợp của các tập hợp

Dựa vào định nghĩa giao và hợp của hai tập hợp để tìm kết quả.

❖ Ví dụ 1. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; 3; 5; 7\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N} | n \text{ là ước số của } 12\}$. Tìm $A \cap B$ và $A \cup B$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 2. Cho tập hợp $B = \{x \in \mathbb{Z} | -4 < x \leq 4\}$ và $C = \{x \in \mathbb{Z} | x \leq a\}$. Tìm số nguyên a để tập hợp $B \cap C = \emptyset$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu $A \subset B$ thì $A \cap B = A$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 4. Cho A là tập hợp học sinh lớp 12 của trường Buôn Ma Thuột và B là tập hợp học sinh của trường Buôn Ma Thuột dự kiến sẽ lựa chọn thi khối A vào các trường đại học. Hãy mô tả các học sinh thuộc tập hợp sau

a) $A \cap B$.

b) $A \cup B$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 5. Cho hai tập hợp A, B biết : $A = \{a; b\}, B = \{a; b; c; d\}$. Tìm tập hợp X sao cho $A \cup X = B$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 6. Xác định tập hợp $A \cap B$ biết

$$A = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là bội của } 3\}, B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là bội của } 7\}.$$

💬 Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

✧ **Bài 1.** Cho hai tập hợp A và B . Tìm $A \cap B, A \cup B$ biết

a) $A = \{x | x \text{ là ước nguyên dương của } 12\}$ và $B = \{x | x \text{ là ước nguyên dương của } 18\}$.

b) $A = \{x | x \text{ là ước nguyên dương của } 27\}$ và $B = \{x | x \text{ là ước nguyên dương của } 15\}$.

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 2.** Cho A là tập hợp các số tự nhiên chẵn không lớn hơn 10, $B = \{n \in \mathbb{N} | n \leq 6\}$ và $C = \{n \in \mathbb{N} | 4 \leq n \leq 10\}$. Hãy tìm $A \cap (B \cup C)$.

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 3.** Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ và $B = \{0; 2; 4\}$. Xác định $A \cap B, A \cup B$.

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 4.** Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N} | 3 < n^2 < 30\}$. Tìm $A \cap B$.

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 5.** Cho a là số nguyên. Tìm a để giao của hai tập hợp

$$A = \{x \in \mathbb{Z} | x \leq a\}, B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x > \frac{3a - 4}{2}\right\}$$

bằng rỗng.

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 6.** Cho hai tập hợp bất kì A, B . Chứng minh rằng $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.

🗨️ **Lời giải.**

✧ **Bài 7.** Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} | x < 8\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} | -3 \leq x \leq 5\}$. Tìm $A \cap B; A \cup B$.

🗨️ **Lời giải.**

✧ **Bài 8.** Tìm điều kiện cần và đủ để hợp của hai tập hợp $A = \{n \in \mathbb{Z} | n < a\}$ và $B = \{m \in \mathbb{Z} | m > 2a + 1\}$ bằng \mathbb{Z} .

🗨️ **Lời giải.**

✧ **Bài 9.** Cho tập $A = \{0; 1; 2\}$ và tập $B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$. Tìm tập C sao cho $A \cup C = B$.

🗨️ **Lời giải.**

✧ **Bài 10.** Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} | |x - 1| < 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | |x - 1| > 2\}$. Tìm $A \cap B$.

🗨️ **Lời giải.**

✧ **Bài 11.** Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} | 2m - 1 < x < 2m + 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | |x| < 2\}$. Tìm m để $A \cap B = \emptyset$.

🗨️ **Lời giải.**

⇔ **Bài 12.** Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} | x < 4\}$ và tập hợp $B = \{n \in \mathbb{N}^* | n \text{ là số nguyên tố } n \leq 5\}$. Xác định tập hợp $A \cap B$ và $A \cup B$.

💬 Lời giải.

⇔ **Bài 13.** Cho tập $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Tìm các tập con A, B của tập S sao cho $A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$ và $A \cap B = \{1; 2\}$.

💬 Lời giải.

⇔ **Bài 14.** Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 4x + m + 2 = 0\}$ và tập hợp $B = \{1; 2\}$. Tìm m để $A \cap B = \emptyset$.

💬 Lời giải.

📁 Dạng 2. Hiệu và phần bù của hai tập hợp

Dựa vào định nghĩa hiệu và phần bù của hai tập hợp để tìm kết quả.

⚠️ **Chú ý**

- ✔️ Nếu $A \subset B$ thì $B \setminus A = C_B A$.
- ✔️ Nếu $A = \emptyset$ thì $A \setminus B = \emptyset$ với mọi tập hợp B .

⇔ **Ví dụ 7.** Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Tìm các tập hợp $A \setminus B, B \setminus A$.

💬 Lời giải.

⇔ **Ví dụ 8.** Cho A là tập hợp các tự nhiên lẻ. Tìm phần bù của A trong tập \mathbb{N} các số tự nhiên.

💬 Lời giải.

⇨ **Ví dụ 9.** Chứng minh rằng $A \setminus B = \emptyset$ thì $A \subset B$.

🗨️ Lời giải.

⇨ **Ví dụ 10.** Cho các tập hợp $A = \{4, 5\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N} | n \leq a\}$ với a là số tự nhiên. Tìm a sao cho $A \setminus B = A$.

🗨️ Lời giải.

⇨ **Ví dụ 11.** Cho hai tập hợp A, B . Biết $A \setminus B = \{1, 2\}$, $B \setminus A = \{3\}$ và $B = \{3, 4, 5\}$. Tìm tập hợp A .

🗨️ Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

⇨ **Bài 15.** Cho A là tập hợp các học sinh của một lớp và B là tập hợp các học sinh giỏi Toán của lớp. Hãy mô tả tập hợp $C_A B$.

🗨️ Lời giải.

⇨ **Bài 16.** Cho A là tập hợp các ước nguyên dương của 12 và B là tập hợp các ước nguyên dương của 18. Tìm các tập hợp $A \setminus B$ và $B \setminus A$.

🗨️ Lời giải.

⇨ **Bài 17.** Chứng minh rằng $A \setminus B = B \setminus A$ thì $A = B$.

🗨️ Lời giải.

⇨ **Bài 18.** Cho hai tập hợp A, B . Biết $A \setminus B = \{a, b, c\}$, $B \setminus A = \{d, e\}$ và $B = \{d, e, f\}$. Tìm tập hợp A .

🗨️ Lời giải.

⇨ **Bài 19.** Cho các tập hợp $A = \{n \in \mathbb{N} | 2 < n \leq 7\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N} | n \leq a\}$ với a là số tự nhiên. Tìm a sao cho:

- a) $A \setminus B = A$.
b) $A \setminus B = \emptyset$.

💬 Lời giải.

⇨ **Bài 20.** Cho hai tập hợp $A = \{2k + 1 | k \in \mathbb{N}\}$ và $B = \{3k | k \in \mathbb{N}\}$. Tìm tập hợp $B \setminus A$.

💬 Lời giải.

📁 Dạng 3. Sử dụng biểu đồ Ven và công thức tính số phần tử của tập hợp $A \cup B$ để giải toán

🕒 Phương pháp biểu đồ Ven:

- Sử dụng các hình tròn giao nhau để mô tả các đại lượng và mối quan hệ giữa chúng.
- Biểu đồ Ven cho ta cách nhìn trực quan và mối quan hệ giữa các đại lượng từ đó tìm ra các yếu tố chưa biết.

🕒 Công thức số phần tử $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

⇨ **Ví dụ 12.** Trong năm vừa qua, trường THPT A có 25 bạn thi học sinh giỏi 2 môn Văn và Toán. Trong đó có 14 bạn thi Toán và 16 bạn thi Văn. Hỏi trường có bao nhiêu bạn thi cả 2 môn Văn và Toán.

💬 Lời giải.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

⇔ **Bài 23.** Trong 45 học sinh lớp 10A có 20 bạn xếp học lực giỏi, 15 bạn đạt hạnh kiểm tốt, trong đó có 7 bạn vừa đạt hạnh kiểm tốt vừa có học lực giỏi. Hỏi

- Lớp 10A có bao nhiêu bạn được khen thưởng, biết muốn được khen thưởng thì hoặc học sinh giỏi hoặc có hạnh kiểm tốt.
- Lớp 10A có bao nhiêu bạn chưa được xét học lực giỏi và hạnh kiểm tốt.

⇔ **Bài 24.** Một lớp có 25 học sinh khá các môn tự nhiên, 24 học sinh khá các môn xã hội, 10 học sinh khá cả 2 và 3 học sinh không khá môn nào. Hỏi:

- Lớp có bao nhiêu học sinh chỉ khá tự nhiên.
- Lớp có bao nhiêu học sinh chỉ khá xã hội.
- Lớp có bao nhiêu hoặc khá tự nhiên hoặc khá xã hội.
- Lớp có bao nhiêu em học sinh.

⇔ **Bài 25.** Lớp 10A có 35 bạn học sinh làm kiểm tra toán. Đề bài gồm 3 bài toán. Sau khi kiểm tra, cô giáo tổng hợp kết quả như sau: có 20 em giải được bài toán thứ nhất; 14 em giải được bài toán 2; 10 em giải được bài toán 3; 5 em giải được bài toán 2 và bài toán 3; 2 em giải được bài toán 1 và bài toán 2; 6 em giải được bài toán 1 và bài toán 3, chỉ có 1 học sinh đạt được điểm 10 vì giải được cả 3 bài. Hỏi lớp đó có bao nhiêu học sinh không giải được bài nào.

💬 Lời giải.

.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

⇔ **Bài 26.** Cho tập hợp $F = \{n \in \mathbb{N} \mid -2 < n < 3\}$ và tập hợp \mathbb{Z} các số nguyên. Xác định tập hợp $F \cap \mathbb{Z}$.

💬 Lời giải.

.....

⇔ **Bài 27.** Cho $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ biết tập $A \subset X$, $A \cap \{2; 4; 6\} = \{2\}$ và $A \cup \{2; 4; 6\} = \{2; 3; 4; 5; 6\}$. Tìm tập A .

💬 Lời giải.

.....

◇◇ **Bài 28.** Cho hai tập hợp $A = \{-3; -2; 0; 1; 2; 5; 9\}$, $B = \{-2; 0; 3; 8; 15\}$. Hãy xác định các tập hợp $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

💬 **Lời giải.**

◇◇ **Bài 29.** Kí hiệu H là tập hợp các học sinh của lớp 10A; T là tập hợp các học sinh nam và G là tập hợp các học sinh nữ của lớp 10A. Hãy xác định các tập hợp sau:

a) $T \cup G$; b) $T \cap G$; c) $H \setminus T$; d) $G \setminus T$; e) $\complement_H G$.

💬 **Lời giải.**

◇◇ **Bài 30.** Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x+2| < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^2}{x+2} \in \mathbb{Z}\}$. Tìm $A \cup B$.

💬 **Lời giải.**

◇◇ **Bài 31.** Cho A là tập hợp các số tự nhiên chẵn và không lớn hơn 10, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 6\}$ và $C = \{n \in \mathbb{N} \mid 4 \leq n \leq 10\}$. Hãy tìm

a) $A \cap (B \cup C)$; b) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

💬 **Lời giải.**

◇◇ **Bài 32.** Cho A, B, C là ba tập hợp rời nhau đôi một. X là tập hợp sao cho các tập $X \cap A$, $X \cap B$, $X \cap C$ có đúng 1 phần tử. Hỏi tập X có ít nhất là bao nhiêu phần tử?

💬 **Lời giải.**

✎ **Bài 33.** Cho $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

- a) Xác định tập hợp $B \setminus A$.
b) Tìm tất cả các tập hợp X sao cho $A \subset X$ và $X \subset B$.

💬 **Lời giải.**

✎ **Bài 34.** Cho tập hợp A thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây:

$$A \cup \{1; 2; 3\} = \{1; 2; 3; 4\}, \quad (1)$$

$$A \cap \{1; 2; 3\} = \{1; 2\}. \quad (2)$$

Hãy xác định tập hợp A .

💬 **Lời giải.**

✎ **Bài 35.** Hãy xác định tập hợp X biết rằng:

$$\{1; 3; 5; 7\} \subset X, \quad \{3; 5; 9\} \subset X, \quad X \subset \{1; 3; 5; 7; 9\}.$$

💬 **Lời giải.**

✎ **Bài 36.** Cho tập hợp $X = \{a; b; c; d; e; g\}$.

- a) Hãy xác định tập hợp Y sao cho $Y \subset X$ và $X \setminus Y = \{b; c; e\}$.
b) Hãy xác định hai tập hợp A và B sao cho:

$$A \cup B = X, \quad B \setminus A = \{d; e\} \quad \text{và} \quad A \setminus B = \{a; b; c\}.$$

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

✧ **Bài 37.** Cho hai tập hợp $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{2x-1}{x+3} \in \mathbb{Z} \right\}$, $B = \{4; 6; 8; 10\}$. Tìm $A \cap B$ và $A \cup B$.

Giải. Ta có $\frac{2x-1}{x+3} = 2 - \frac{7}{x+3}$. Do đó với $x \in \mathbb{Z}$ và $x \neq -3$ thì $\frac{2x-1}{x+3} \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $x+3$ là ước của 7, tức là

$$\begin{cases} x+3=1 \\ x+3=-1 \\ x+3=7 \\ x+3=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-4 \\ x=4 \\ x=-10. \end{cases}$$

Vậy $A = \{-2; -4; 4; -10\}$, suy ra: $A \cup B = \{-2; -4; -10; 4, 6, 8, 10\}$, $A \cap B = \{4\}$.

✧ **Bài 38.** Cho tập hợp $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

a) Tìm các tập hợp con A, B của S sao cho:

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}, A \cap B = \{1; 2\}.$$

b) Tìm các tập C sao cho: $C \cup (A \cap B) = A \cup B$.

🗨 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

✧ **Bài 39.** Xét X và Y là hai tập hợp con của tập hợp $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ và thỏa mãn ba điều kiện:

- (1) $X \cap Y = \{4; 6; 9\}$.
- (2) $X \cup \{3; 4; 5\} = \{1; 3; 4; 5; 6; 8; 9\}$.
- (3) $Y \cup \{4; 8\} = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

a) Hãy chỉ ra rằng từ điều kiện (1) và (2) ta suy ra $1 \in X$ và $1 \notin Y$, $8 \in X$ và $8 \notin Y$, $7 \notin X$.

b) Xác định các tập hợp X và Y mà thỏa mãn các điều kiện (1), (2) và (3).

🗨 **Lời giải.**

Khi đó: $m = \frac{1005 - 3n}{2} \Leftrightarrow m = 502 - n - \frac{n-1}{2}$. Vì m, n là những số nguyên dương nên suy ra $\frac{n-1}{2} = p \in \mathbb{Z}$. Từ đó $n = 2p + 1$ và

$$m = 502 - (2p + 1) - p = 501 - 3p.$$

Vì m, n là những số nguyên dương nên

$$\begin{cases} 2p + 1 \geq 1 \\ 501 - 3p \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq 0 \\ p \leq \frac{500}{3} \end{cases} \Rightarrow 0 \leq p \leq 166.$$

Nhưng $x = 3n - 2 = 3(2p + 1) - 2 = 6p + 1$, suy ra

$$x \in C \Rightarrow A \cap B \subset C. \quad (1)$$

☞ Chứng minh $C \subset A \cap B$. Giả sử $x \in C$, cần chứng minh $x \in A \cap B$. Thực vậy, nếu $x \in C$ thì tồn tại $p \in \mathbb{Z}$, $0 \leq p \leq 166$, sao cho $x = 6p + 1$. Ta sẽ chỉ ra rằng x có thể được viết dưới dạng $x = 3n - 2$, $n \in \mathbb{N}^*$. Ta có

$$x = 6p + 1 = (6p + 3) - 2 = 3(2p + 1) - 2 = 3n - 2,$$

với $n = 2p + 1 \in \mathbb{N}^*$, suy ra $x \in A$. Ta còn phải chứng minh $x \in B$.

$$x = 6p + 1 = 1003 - (1002 - 6p) = 1003 - 2(501 - 3p) = 1003 - 2m,$$

với $m = 501 - 3p$. Ta có:

$$0 \leq p \leq 166 \Rightarrow 0 \leq 3p \leq 498 \Rightarrow 501 - 3p \geq 3 \Rightarrow m = 501 - 3p \in \mathbb{N}^*.$$

Như vậy $x \in B$. Từ $x \in A$ và $x \in B$ suy ra

$$x \in A \cap B \Leftarrow C \subset A \cap B. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A \cap B = C$, điều phải chứng minh.

BÀI 4. CÁC TẬP HỢP SỐ

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Các tập hợp số đã học

⇨ **Định nghĩa 4.1.** Tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ và $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$.

⇨ **Định nghĩa 4.2.** Tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

⇨ **Định nghĩa 4.3.** Tập hợp các số hữu tỉ kí hiệu \mathbb{Q} , là số viết được dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

⇨ **Định nghĩa 4.4.** Tập hợp các số thực kí hiệu \mathbb{R} , gồm các số thập phân hữu hạn, vô hạn tuần hoàn và vô hạn không tuần hoàn. Các số thập phân vô hạn không tuần hoàn gọi là số vô tỉ.

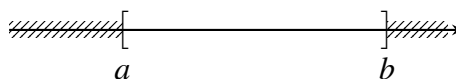
2. Các tập con thường dùng của \mathbb{R}

Trong toán học ta thường gặp các tập hợp con sau đây của tập hợp các số thực \mathbb{R}

a. Khoảng

$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} a < x < b\}$	
$(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} a < x\}$	
$(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} x < b\}$	

b. Đoạn $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$



c. Nửa khoảng

$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} a \leq x < b\}$	
$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} a < x \leq b\}$	
$[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} a \leq x\}$	
$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} x \leq b\}$	

! Kí hiệu $+\infty$ đọc là dương vô cực (hoặc dương vô cùng), kí hiệu $-\infty$ đọc là âm vô cực (hoặc âm vô cùng).



--	--

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

⇨ **Bài 1.** Xác định tập hợp $[0; 5) \cup (-4; 2)$ và biểu diễn trên trục số.

Lời giải.

--	--

⇨ **Bài 2.** Cho hai tập hợp $A = [m + 1; 10)$ với $m < 0$ và tập hợp $B = (5; 8)$. Hãy xác định tập hợp $A \cup B$.

Lời giải.

--	--

⇨ **Bài 3.** Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x\}$. Tìm $A \cap B$.

Lời giải.

--	--

⇨ **Bài 4.** Cho $A = [-2; 4]$, $B = (2; +\infty)$, $C = (-\infty; 3)$. Xác định các tập hợp sau đây và biểu diễn chúng trên trục số.

a) $A \cap B, B \cap C$.

b) $\mathbb{R} \cap A, \mathbb{R} \cap B$.

Lời giải.

◊ Bài 12. Tìm m để

- a) $(1; m] \cap (3; +\infty) \neq \emptyset$.
 b) $(-\infty; -2) \cup [2m + 1; +\infty) = \mathbb{R}$.
 c) $(m - 2; 3) \subset [-1; 5]$.

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ Bài 13. Cho $A = (-\infty; m)$, $B = [5m - 2; 5m + 5]$. Tìm m để

- a) $A \cap B = \emptyset$.
 b) $B \subset A$.
 c) $A \subset (\mathbb{R} \setminus B)$.
 d) $(\mathbb{R} \setminus A) \cap B \neq \emptyset$.

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ Bài 14. Cho $A = \left[m - 3; \frac{m + 3}{2} \right]$, $B = (-\infty; -4) \cup [4; +\infty)$. Tìm m để

- a) $A \subset B$.
 b) $A \cap B = \emptyset$.

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

BÀI TẬP TỔNG HỢP

✎ **Bài 15.** Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 3\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 7\}$; $C = \{x \in \mathbb{N}^* | x \leq 3\}$ và $D = \{x \in \mathbb{Z} | -4 \leq x \leq 4\}$. Biểu diễn các tập A, B, C, D trên trục số và xác định tập hợp $(A \cap B) \setminus (C \cap D)$.

💬 **Lời giải.**

✎ **Bài 16.** Cho $a > 0$. Hãy xác định tập hợp $\left((0; a] \cap \left(\frac{a}{2}; 2a \right) \right) \setminus \{a\}$.

💬 **Lời giải.**

✎ **Bài 17.** Cho $a > 0$. Hãy xác định tập hợp $\left(\left[\frac{a}{3}; 5a \right] \right) \cup (0; a) \cap (3a; 6a)$.

💬 **Lời giải.**

BÀI 5. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG I

A – ĐỀ SỐ 1A

⇨ **Bài 1.** (3 điểm)

- a) Xét tính đúng sai và lập mệnh đề phủ định của mệnh đề $P : " \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -3 "$.
- b) Cho tam giác ABC , xét hai mệnh đề $P : AB^2 + AC^2 = BC^2$, $Q : \hat{A} = 90^\circ$. Hãy lập mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

🗨️ **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Bài 2.** (2 điểm) Cho hai tập hợp $A = (2; 5)$, $B = [-1; 3)$. Xác định các tập hợp sau: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ và $B \setminus A$.

🗨️ **Lời giải.**

.....
.....

⇨ **Bài 3.** Cho các tập hợp $C_{\mathbb{R}}A = [-3; 2)$ và $C_{\mathbb{R}}B = (-2; 3)$. Tìm tập hợp $C_{\mathbb{R}}(A \cap B)$.

🗨️ **Lời giải.**

.....
.....

⇨ **Bài 4.** (2 điểm) Mỗi học sinh lớp 10A đều chơi bóng bàn hoặc cầu lông. Biết rằng có 25 bạn chơi bóng bàn, 23 bạn chơi cầu lông và 10 bạn chơi cả hai môn. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh?

🗨️ **Lời giải.**

.....
.....

⇨ **Bài 5.** (1 điểm) Độ cao của một cái cây là $h = 50,54m \pm 0,1m$. Hãy viết số quy tròn của số 50,54.

🗨️ **Lời giải.**

.....
.....

B – ĐỀ SỐ 1B

🔗 **Bài 1.** (3 điểm)

- a) Xét tính đúng sai và lập mệnh đề phủ định của mệnh đề P : " $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 3$ ".
- b) Cho tam giác ABC , xét hai mệnh đề $P : AB = BC$, $Q : \widehat{A} = \widehat{C}$. Hãy lập mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

🗨️ Lời giải.

.....

.....

.....

.....

🔗 **Bài 2.** (2 điểm) Cho hai tập hợp $A = (1; 6)$, $B = [0; 4)$. Xác định các tập hợp sau: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ và $B \setminus A$.

🗨️ Lời giải.

.....

.....

🔗 **Bài 3.** Cho các tập hợp $C_{\mathbb{R}}A = [-4; 2)$ và $C_{\mathbb{R}}B = (-3; 3)$. Tìm tập hợp $C_{\mathbb{R}}(A \cap B)$.

🗨️ Lời giải.

.....

.....

🔗 **Bài 4.** (2 điểm) Mỗi học sinh lớp 10B đều giỏi Toán hoặc giỏi Tiếng Anh. Biết rằng có 28 bạn giỏi Toán, 22 bạn giỏi Tiếng Anh và 10 bạn giỏi cả hai môn. Hỏi lớp 10B có bao nhiêu học sinh?

🗨️ Lời giải.

.....

.....

🔗 **Bài 5.** (1 điểm) Chiều dài của một cây cầu là $l = 150,45\text{m} \pm 0,1\text{m}$. Hãy viết số quy tròn của số 150,45.

🗨️ Lời giải.

.....

.....

C - ĐỀ SỐ 2A

🔗 **Bài 1.** (3,0 điểm)

- a) Mệnh đề sau đây đúng hay sai? giải thích.
"Mọi số thực chia hết cho 6 đều chia hết cho 3".
- b) Dùng kí hiệu \exists để viết mệnh đề: "Có một số thực mà bình phương của nó bằng -1 ."
- c) Lập mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + 1} > x$."

🗨️ Lời giải.

🔗 **Bài 5. (1,0 điểm)**

Hãy viết số quy tròn của số gần đúng $a = 2,7182$ biết $\bar{a} = 2,7182 \pm 0,001$.

💬 Lời giải.

D – ĐỀ SỐ 2B

🔗 **Bài 1. (3,0 điểm)**

- Mệnh đề sau đây đúng hay sai? giải thích.
" Bình phương của một số thực đều lớn hơn chính nó."
- Dùng kí hiệu \forall để viết mệnh đề: " Mọi số thực bình phương đều lớn hơn 0. "
- Lập mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R} : 2x^2 - 3x + 1 = 0$."

💬 Lời giải.

🔗 **Bài 2. (2,0 điểm)**

- Liệt kê các phân tử của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} : x^2 - x - 6 = 0\}$.
- Liệt kê các tập con của tập hợp $P = \{3, 5, 7\}$

💬 Lời giải.

🔗 **Bài 3. (2,0 điểm)**

Cho hai tập hợp $A = \{2, 3, 5, 7, 8, 9\}$ và $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Tìm: $A \cup B; A \cap B; B \setminus A; A \setminus B$.

💬 Lời giải.

F – ĐỀ SỐ 3B

⇨ **Bài 1.** (2,5 điểm) Cho mệnh đề $A : "\forall k \in \mathbb{R}, k^2 + 3k + 5 > 0"$.

- Viết mệnh đề phủ định của mệnh đề A .
- Chứng minh rằng mệnh đề A là một mệnh đề đúng.

 **Lời giải.**

⇨ **Bài 2.** (3,5 điểm) Cho hai tập hợp $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x - 1| \leq 2\}$ và $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid x(x - 1)(x^2 - 6x + 8) = 0\}$

- Viết các tập X, Y bằng cách liệt kê các phần tử.
- Tìm $X \cap Y, X \cup Y$ và $X \setminus Y$.

 **Lời giải.**

⇨ **Bài 3.** (2,0 điểm) Cho hai tập hợp $A = (m - 2; m + 1]; B = [-1; 4)$.

- Khi $m = 2$. Tìm tập hợp $C_{\mathbb{R}}A \cap B$.

b) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A \subset B$.

 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Bài 4.** (1,0 điểm) Trong kì thi học sinh giỏi cấp trường, lớp 11C1 có 40 học sinh trong đó có 15 bạn đạt học sinh giỏi Tiếng Anh, 20 bạn đạt học sinh giỏi Lý và 10 bạn học sinh không đạt học sinh giỏi. Tìm số học sinh giỏi cả Tiếng Anh và Lý của lớp 11C1.

 Lời giải.

.....
.....

❖ **Bài 5.** (1,0 điểm) Bác nông dân đo mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài $5 \pm 0,3m$ và chiều rộng $3 \pm 0,1m$. Hỏi diện tích của mảnh vườn có thể nhỏ nhất là bao nhiêu (quy tròn đến hàng phần chục)?

 Lời giải.

.....
.....

G-ĐỀ SỐ 4A

❖ **Bài 1.** Cho các câu sau:

1. Mở cửa ra!
2. Chủ tịch Hồ Chí Minh sinh năm 1890.
3. $2x - 1 < 0$.
4. 2018 chia 3 dư 1.
5. $\sqrt{3}$ là số vô tỉ.
6. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$.

- a) Trong các câu cho ở trên câu nào là mệnh đề? Với câu là mệnh đề hãy xác định xem mệnh đề đó đúng hay sai.
- b) Trong các câu cho ở trên, với câu là mệnh đề hãy nêu mệnh đề phủ định của nó.

 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

✎ **Bài 5.** Trong số 45 cán bộ của nhóm phiên dịch được triệu tập để phục vụ hội nghị quốc tế có 25 cán bộ phiên dịch tiếng Anh, 15 cán bộ phiên dịch tiếng Pháp, trong đó có 10 cán bộ vừa phiên dịch được tiếng Anh, vừa phiên dịch được tiếng Pháp. Hỏi

- Nhóm có bao nhiêu cán bộ được cấp thẻ đỏ, biết rằng muốn được cấp thẻ đỏ cán bộ đó phải phiên dịch được tiếng Anh hoặc phiên dịch được tiếng Pháp.
- Nhóm có bao nhiêu cán bộ không phiên dịch được tiếng Anh và không phiên dịch được tiếng Pháp.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....

✎ **Bài 6.** Tính độ dài cạnh hình vuông có độ dài đường chéo bằng 3, biết $\sqrt{2} \approx 1,414213562$ (lấy kết quả 3 chữ số thập phân).

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....

H – ĐỀ SỐ 4B

✎ **Bài 1.** Cho các câu sau:

- Đóng cửa vào!
 - Chủ tịch Hồ Chí Minh ra đi tìm đường cứu nước vào năm 1911.
 - $2x - 1 \geq 0$.
 - 2018 chia hết cho 3.
 - $\sqrt{3}$ là số hữu tỉ.
 - $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$.
- Trong các câu cho ở trên câu nào là mệnh đề? Với câu là mệnh đề hãy xác định xem mệnh đề đó đúng hay sai.
 - Trong các câu cho ở trên, với câu là mệnh đề hãy nêu mệnh đề phủ định của nó.

💬 **Lời giải.**



.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Bài 5.** Trong số 50 cán bộ của nhóm phiên dịch được triệu tập để phục vụ hội nghị quốc tế có 35 cán bộ phiên dịch tiếng Anh, 20 cán bộ phiên dịch tiếng Pháp, trong đó có 15 cán bộ vừa phiên dịch được tiếng Anh, vừa phiên dịch được tiếng Pháp. Hỏi

- Nhóm có bao nhiêu cán bộ được cấp thẻ đỏ, biết rằng muốn được cấp thẻ đỏ cán bộ đó phải phiên dịch được tiếng Anh hoặc phiên dịch được tiếng Pháp.
- Nhóm có bao nhiêu cán bộ không phiên dịch được tiếng Anh và không phiên dịch được tiếng Pháp.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....

❖ **Bài 6.** Tính độ dài cạnh hình vuông có độ dài đường chéo bằng 5, biết $\sqrt{2} \approx 1,414213562$ (lấy kết quả 3 chữ số thập phân).

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....

HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

BÀI 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hàm số và tập xác định của hàm số

↔ **Định nghĩa 1.1.** Nếu với mỗi giá trị của x thuộc tập \mathcal{D} có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập số thực \mathbb{R} thì ta có một **hàm số**. Ta gọi x là **biến số** và y là **hàm số** của x . Tập hợp \mathcal{D} được gọi là **tập xác định** của hàm số.

2. Cách cho hàm số

- Hàm số cho bằng bảng
- Hàm số cho bằng biểu đồ
- Hàm số cho bằng công thức

⚠ *Khi cho hàm số bằng công thức mà không chỉ rõ tập xác định của nó thì ta quy ước: Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.*

3. Đồ thị của hàm số

↔ **Định nghĩa 1.2.** Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập \mathcal{D} là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ với mọi x thuộc \mathcal{D} .

Ta thường gặp trường hợp đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là một đường (đường thẳng, đường cong,...). Khi đó, ta nói $y = f(x)$ là **phương trình** của đường đó.

4. Sự biến thiên của hàm số

↔ **Định nghĩa 1.3.** Hàm số $y = f(x)$ gọi là **đồng biến (tăng)** trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Hàm số $y = f(x)$ gọi là **nghịch biến (giảm)** trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

⚠ *Xét chiều biến thiên của một hàm số là tìm các khoảng đồng biến và các khoảng nghịch biến của hàm số đó.*

5. Tính chẵn lẻ của hàm số

⇔ **Định nghĩa 1.4.** Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định \mathcal{D} .
 Hàm số $y = f(x)$ gọi là **hàm số chẵn** nếu $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = f(x)$.
 Hàm số $y = f(x)$ gọi là **hàm số lẻ** nếu $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = -f(x)$.

⚠ **Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng. Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.**

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số

Để tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$, ta làm như sau:

+ Tìm điều kiện để $f(x)$ có nghĩa.

+ Tập hợp các giá trị x thỏa mãn $f(x)$ có nghĩa tìm được chính là tập xác định của hàm số.

Một số trường hợp thường gặp:

$$\sqrt{f(x)} \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow f(x) \geq 0.$$

$$\frac{1}{f(x)} \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow f(x) \neq 0.$$

$$\frac{1}{\sqrt{f(x)}} \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow f(x) > 0.$$

⇔ **Ví dụ 1.** Tìm tập xác định của hàm số $y = -x^3 + 3x + 2017$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

⇔ **Ví dụ 2.** Tìm tập xác định của hàm số $y = x - \frac{2}{x-3}$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

⇔ **Ví dụ 3.** Tìm tập xác định của hàm số $y = x + \sqrt{x+1}$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

⇔ **Bài 1.** Tìm tập xác định của hàm số $y = x^4 + x^2 - 2$.

💬 **Lời giải.**

◇◇ **Bài 2.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{x+2}{4x^2+5x-9}$.

💬 Lời giải.

◇◇ **Bài 3.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{3+x}{x^2+2x+5}$.

💬 Lời giải.

◇◇ **Bài 4.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}}{x-2}$.

💬 Lời giải.

◇◇ **Bài 5.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{2x+3}{(2x-1)(x+3)}$.

💬 Lời giải.

◇◇ **Bài 6.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x-3}$.

💬 Lời giải.

◇◇ **Bài 7.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x+2}$.

💬 Lời giải.

◇◇ **Bài 8.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{4x+2} + \frac{x}{\sqrt{-x+1}}$.

💬 Lời giải.

🔗 **Bài 9.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{x+2}{|x-1|+|x-2|}$.

💬 Lời giải.

🔗 **Bài 10.** Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{2}{|x|-3}$.

💬 Lời giải.

📁 Dạng 2. Tính giá trị của hàm số tại một điểm

- Để tính giá trị của hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$ ta thay thế x bởi x_0 vào công thức $f(x)$ để tính $f(x_0)$.
- Đối với các hàm số được cho bởi hai hay nhiều công thức với các miền xác định đã cho, chẳng hạn:

$$y = f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{với } x \in \mathcal{D}_1 \\ f_2(x) & \text{với } x \in \mathcal{D}_2 \end{cases}$$

Khi tính giá trị hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$, tùy theo x_0 thuộc \mathcal{D}_1 hay \mathcal{D}_2 mà ta sử dụng công thức $f(x) = f_1(x)$ hay $f(x) = f_2(x)$ để tính $f(x_0)$.

⚠️ Với hàm số $f(x)$ được cho bởi công thức phức tạp, để tính một cách nhanh và chính xác giá trị $f(x_0)$ ta sử dụng máy tính cầm tay để tính. Quy trình bấm máy:

- 🕒 Nhập công thức $f(x)$;
- 🕒 Bấm r ;
- 🕒 Nhập giá trị x_0 ;
- 🕒 Bấm $=$.

CÁC VÍ DỤ

🔗 **Ví dụ 4.** Cho hàm số $y = f(x) = 2x^2 - 3x - 1$. Tính giá trị của hàm số đó tại $x = -2$.

💬 Lời giải.

🔗 **Ví dụ 5.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{với } x \geq 1 \\ 1-2x^2 & \text{với } x < 1. \end{cases}$
 Tính $f(1), f(2), f(0), f(-3)$.

💬 Lời giải.

⇨ **Ví dụ 6.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{với } x \leq 0 \\ \frac{x+1}{x^2+x+1} & \text{với } x > 0. \end{cases}$
 Tính giá trị của hàm số đó tại $x = 1; x = 0; x = -2$.

🗨️ **Lời giải.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

⇨ **Bài 11.** Cho hàm số $f(x) = -x^2 - 4x + 5$. Tính $f(-2)$.

🗨️ **Lời giải.**

⇨ **Bài 12.** Cho hai hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ và $g(x) = 1 - x$. Tính giá trị $\frac{f(-1)}{g(2)}$.

🗨️ **Lời giải.**

⇨ **Bài 13.** Cho hàm số $f(y) = 4 - \sqrt{y}$. Tính $f(4y^2)$.

🗨️ **Lời giải.**

⇨ **Bài 14.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-x} & \text{với } x < 3 \\ \sqrt{x+5} & \text{với } x \geq 3. \end{cases}$
 Tính $f(-4), f(1), f(4)$.

🗨️ **Lời giải.**

⇨ **Bài 15.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{với } x < -1 \\ 3 & \text{với } -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{với } x \geq 1. \end{cases}$
 Tính $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$.

🗨️ **Lời giải.**

⇨ **Bài 16.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{với } x \leq 2 \\ \sqrt{x^2-2\sqrt{2}} & \text{với } x > 2. \end{cases}$

Tính $f(1), f(\sqrt{2}), f(\sqrt{3}), f(\sqrt{2}+1)$.

 Lời giải.

◆ **Bài 17.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{với } -4 \leq x < -1 \\ -x^2+2 & \text{với } -1 \leq x \leq 2 \\ 2-x & \text{với } x > 2. \end{cases}$
 Tính $f(0), f(\sqrt{2}), f(-1), f(\sqrt{2}), f(3)$.

 Lời giải.

◆ **Bài 18.** Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Tính $\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$, với $x \neq 3$.

 Lời giải.

◆ **Bài 19.** Cho hàm số $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. Tính $f(a), f(x+2)$ (với a là một số thực).

 Lời giải.

◆ **Bài 20.** Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2$. Tìm giá trị của số thực a sao cho $f(a-1) = 2$.

 Lời giải.

◆ **Bài 21.** Cho hàm số $f(x) = 2x + m$, với m là tham số. Tính m để $f(1) = 4$.

 Lời giải.

Dạng 3. Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K .

- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \\ \Leftrightarrow & \forall x_1, x_2 \in K : x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0. \end{aligned}$$

- Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K khi và chỉ khi

$$\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K : x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0.$$

◊ Ví dụ 7. Dùng định nghĩa chứng minh hàm số $y = 2x + 3$ đồng biến trên \mathbb{R} .

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ Ví dụ 8. Dùng định nghĩa xét tính đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = x^2 + 10x + 9$ trên $(-5; +\infty)$.

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ Ví dụ 9. Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số $y = \frac{4}{x+1}$ trên $(-1; +\infty)$.

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ Ví dụ 10. Dùng định nghĩa xét sự biến thiên của hàm số $y = \sqrt{x-1}$ trên tập xác định.

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....

⇨ **Bài 30.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{x-2}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Bài 31.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{m+1}{x}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

 **Lời giải.**

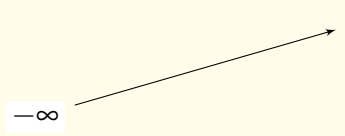
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 4. Tính đơn điệu của hàm bậc nhất

a) Sự biến thiên của hàm số $y = ax + b$ trên \mathbb{R} .

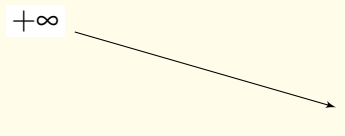
☑ Khi $a > 0$ hàm số đồng biến trên \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
y	$-\infty$	$+\infty$



☑ Khi $a < 0$ hàm số nghịch biến trên \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\infty$



b) Sự biến thiên của hàm số $y = |x|$ trên \mathbb{R} .

- Ta có $y = |x| = \begin{cases} x & \text{khi } x \geq 0 \\ -x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

- Do đó, khi $x \geq 0$ thì $y = x$ là hàm số đồng biến, khi $x < 0$ thì $y = -x$ là hàm số nghịch biến.

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

🔗 **Ví dụ 12.** Xét sự biến thiên của hàm số $y = 2x - 3$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

🔗 **Ví dụ 13.** Xét sự biến thiên của hàm số $y = |1 - x|$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

🔗 **Ví dụ 14.** Xét sự biến thiên của hàm số $y = |x + 2| + |x - 2|$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....

✎ **Bài 35.** Xét sự biến thiên của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$.

💬 Lời giải.

✎ **Bài 36.** Xét sự biến thiên của hàm số $y = |1 - x| + |2x + 4|$.

💬 Lời giải.

✎ **Bài 37.** Xét sự biến thiên của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 2|x - 1|$.

💬 Lời giải.

✎ **Bài 38.** Xác định a để hàm số $y = (2a + 3)x + a - 1$ đồng biến trên tập xác định.

💬 Lời giải.

✎ **Bài 39.** Cho hàm số $y = (m - 1)x + (2 - m)$. Biện luận tính đơn điệu của hàm số đã cho theo tham số m .

💬 Lời giải.

Dạng 5. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

☑ Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định \mathcal{D} được gọi là hàm số chẵn khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D} \text{ thì } -x \in \mathcal{D}, \\ \forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = f(x). \end{cases}$$

☑ Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định \mathcal{D} được gọi là hàm số lẻ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D} \text{ thì } -x \in \mathcal{D}, \\ \forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = -f(x). \end{cases}$$

☑ Đồ thị hàm số chẵn đối xứng qua trục Oy .

☑ Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

🔗 Ví dụ 16. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = x^2 + 3$.

 Lời giải.

🔗 Ví dụ 17. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = \frac{1}{x^3}$.

 Lời giải.

🔗 Ví dụ 18. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = \sqrt{2x - 3}$.

 Lời giải.

🔗 Ví dụ 19. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = 3$.

 Lời giải.

🔗 Ví dụ 20. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = x^4 + 3x^3 - 2$.

 Lời giải.

❖ **Ví dụ 21.** Có hàm số nào vừa chẵn, vừa lẻ không?

💬 Lời giải.

❖ **Ví dụ 22.** Tìm m để hàm số $y = x^2 + (m + 1)x + 2$ là hàm chẵn.

💬 Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

❖ **Bài 40.** Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a) $f(x) = \sqrt{3x - 4}$

b) $f(x) = \frac{2x^2 - 4}{x}$

c) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4}$

d) $f(x) = -5$

e) $f(x) = 0$

f) $f(x) = -x^4 + 5x - 3$

g) $f(x) = \frac{-x^4 + x^2 + 1}{3x}$

h) $f(x) = -5x^3 + 7x$

i) $f(x) = |-x + 5| - |x + 5|$

j) $f(x) = |7 - 5x| + |5x + 7|$

k) $f(x) = \frac{|x + 3| + |x - 3|}{|x + 3| - |x - 3|}$

l) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9} + \left| \frac{x - 4}{x + 4} \right| + \left| \frac{x + 4}{x - 4} \right|$

m) $f(x) = \begin{cases} 5 - x, & x \geq 0 \\ 5 + x, & x < 0. \end{cases}$

❖ **Bài 41.** Tùy theo m , hãy xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau

a) $y = f(x) = \frac{1}{mx^2 + 2(m - 1)x - m}$.

$$b) y = f(x) = \frac{1}{(m+1)x^2 + mx - 1}.$$

✧ **Bài 42.** Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + (m^2 - 1)x^2 + m - 1$. Tìm m để hàm số là hàm lẻ.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

✧ **Bài 43.** Cho hàm số $f(x) = x^2 - x + 1$. Tính $f(x+h) - f(h)$ (với h là một số thực).

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 44.** Một quả bóng chày được đánh lên ở độ cao 1 mét so với mặt đất. Đường đi của quả bóng chày được cho bởi hàm số $y = f(x) = -0,0097x^2 + x + 1$. Trong đó x và $f(x)$ được tính bằng mét. Hỏi quả bóng có bay qua được một hàng rào cao 4 mét và nằm cách vị trí người đánh bóng 100 mét hay không?

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 45.** Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{5+x+2\sqrt{x+4}}$.

- Tìm tập xác định của hàm số.
- Xét tính chẵn lẻ của hàm số.
- Xét tính đơn điệu của hàm số.
- Lập bảng biến thiên của hàm số.
- Tính các giá trị $f(-5), f(-4), f(-3), f(0)$.

💬 **Lời giải.**

BÀI 2. HÀM SỐ $Y = AX + B$

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

⇨ **Định nghĩa 2.1.** Hàm số $y = ax + b$ với $a \neq 0$ gọi là hàm số bậc nhất.

- ⊙ Hàm số $y = ax + b$ đồng biến trên \mathbb{R} nếu $a > 0$, nghịch biến trên \mathbb{R} nếu $a < 0$.
- ⊙ Đồ thị của hàm số $y = ax + b, a \neq 0$ là một đường thẳng không song song và không trùng với các trục tọa độ. Đồ thị hàm số $y = ax + b$ còn gọi là đường thẳng $y = ax + b$, trong đó a gọi là hệ số góc của đường thẳng.
- ⊙ Hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ song song với nhau nếu $a = a'$ và $b \neq b'$.
- ⊙ Hai đường thẳng $y = ax + b, a \neq 0$ và $y = a'x + b', a' \neq 0$ vuông góc với nhau nếu $aa' = -1$.

⇨ **Định nghĩa 2.2.** Hàm số $y = b$ gọi là hàm số hằng.

- ⊙ Hàm số $y = b$ có giá trị không đổi trên \mathbb{R} .
- ⊙ Đồ thị của hàm số $y = b$ là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành.

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Vẽ đồ thị hàm số bậc nhất

Để vẽ đồ thị của hàm số bậc nhất $y = ax + b$, ta tìm hai điểm phân biệt mà đồ thị đi qua. Sau đó vẽ một đường thẳng đi qua hai điểm đó. Thông thường ta chọn hai điểm $(0; b)$ và $(-\frac{b}{a}; 0)$.

Đặc biệt: Đồ thị của hàm số hằng $y = b$ là một đường thẳng vuông góc và cắt trục tung tại điểm $(0; b)$.

⇨ **Ví dụ 1.** Vẽ đồ thị của hàm số $y = 3x - 4$.

 **Lời giải.**

<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
---	---

⇨ **Ví dụ 2.** Vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

 **Lời giải.**



.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Ví dụ 3.** Vẽ đồ thị của hàm số $y = \sqrt{2}x$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Ví dụ 4.** Vẽ đồ thị của hàm số $y = -\sqrt{3}$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

❖ **Bài 1.** Vẽ đồ thị của hàm số $y = -2x + 5$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Bài 2.** Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x - 1$.

💬 **Lời giải.**

--	--

◊ **Bài 3.** Vẽ đồ thị của hàm số $y = 3\sqrt{2} - 1$.

🗨️ **Lời giải.**

--	--

◊ **Bài 4.** Vẽ đồ thị của hàm số $y = \sqrt{3}(x - 2)$.

🗨️ **Lời giải.**

--	--

◊ **Bài 5.** Vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{7}{2}x$.

🗨️ **Lời giải.**

--	--

◊ **Bài 6.** Vẽ đồ thị của hàm số $y = -2(x - 1) + 1$.

🗨️ **Lời giải.**

--	--

🔗 **Bài 7.** Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2x-3}{2}$.

💬 **Lời giải.**

📁 Dạng 2. Xác định hệ số a và b của số bậc nhất

Phương pháp: Dựa vào các yếu tố điểm thuộc đường, lý thuyết hai đường song song, vuông góc, hệ số góc, giao điểm của hai đường để tìm ra mối quan hệ giữa a và b .

Những điểm cần chú ý:

- 🕒 Nếu có hai tham số a, b chưa biết thì ta cần tìm hai quan hệ của a, b độc lập để giải hệ phương trình tìm a, b .
- 🕒 Nếu điểm $M(x_M; y_M)$ thuộc đường thẳng $d : y = ax + b$ thì ta có $y_M = ax_M + b$.
- 🕒 Cho $(d) : y = ax + b$ và $(d') : y = a'x + b'$.
 Nếu $(d) \parallel (d')$ thì $\begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$.
 Nếu $(d) \perp (d')$ thì $a' = -\frac{1}{a}$.
- 🕒 Nếu cho hệ số góc k tức là cho hệ số a của đường thẳng $(d) : y = ax + b$.
- 🕒 Nếu cho góc của đường thẳng $(d) : y = ax + b$ tạo với trục hoành là α thì ta hiểu là cho $a = \tan(\alpha)$.

🔗 **Ví dụ 5.** Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = x + b$. Tìm b biết (d) đi qua điểm $M(1; 2)$.

💬 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 6.** Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm a, b biết (d) đi qua điểm $A(-1; 2)$ và $B(2; 3)$.

💬 **Lời giải.**

◊ Ví dụ 7. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm a, b biết (d) đi qua điểm $A(-1; -2)$ và có hệ số góc là 3.

🗨️ Lời giải.

.....
.....

◊ Ví dụ 8. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm phương trình (d) biết (d) đi qua điểm $A(-3; 2)$ và song song với $(\Delta) : y = -x + 2$.

🗨️ Lời giải.

.....
.....

◊ Ví dụ 9. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm phương trình (d) biết (d) đi qua điểm $M(2; 5)$ và vuông góc với $(\Delta) : y = -\frac{1}{2}x + 2$.

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....

◊ Ví dụ 10. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm phương trình (d) biết (d) cắt Ox tại điểm có hoành độ là 3 và đi qua điểm $A(1; 2)$.

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....

◊ Ví dụ 11. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = f(x) = ax + b$. Tìm a, b biết đường thẳng d đi qua giao điểm của $(d_1) : y = x + 1$ và $(d_2) : y = -2x + 1$ và điểm $B(-1; 2)$.

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....

❖ **Ví dụ 12.** Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = f(x) = ax + b$. Tìm a, b biết phương trình $f(x+1) = 0$ có nghiệm là $x = 2$ và $f(2x+1) = 3$ là có nghiệm là $x = -1$.

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

❖ **Bài 8.** Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm a, b biết (d) song song với đường phân giác góc phần tư thứ nhất và đi qua điểm $A(3; 1)$.

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....

❖ **Bài 9.** Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm a, b biết (d) đi qua điểm $A(1, 2)$ và gốc toạ độ O .

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....

❖ **Bài 10.** Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm a, b biết (d) đi qua điểm $A(1; -2)$ và (d) tạo với Ox một góc là 45° .

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....

❖ **Bài 11.** Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm phương trình (d) biết (d) đi qua điểm $A(3, 2)$ và song song với Ox .

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....

❖ **Bài 12.** Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm phương trình (d) biết (d) đi qua điểm $M(2, 1)$ và vuông góc với $(\Delta) : y = 3x + 2$.

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....

✧ **Bài 13.** Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm phương trình (d) biết (d) cắt Ox tại điểm có hoành độ là 2 và cắt trục Oy với tung độ là 3.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....

✧ **Bài 14.** Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = f(x) = ax + b$. Tìm phương trình a, b biết phương trình $f(x+1) = 0$ có nghiệm là $x = 1$ và $f(2) = 3$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....

📁 Dạng 3. Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số bậc nhất có chứa giá trị tuyệt đối

Để vẽ đồ thị hàm số $y = |x|$ ta sử dụng định nghĩa của giá trị tuyệt đối:

$$y = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Sau đó ta xét sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho trên từng khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

CÁC VÍ DỤ

✧ **Ví dụ 13.** Vẽ đồ thị của hàm số $y = 3|x| - 2$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....

✧ **Ví dụ 14.** Vẽ đồ thị của hàm số $y = |x| - 2x$.

💬 **Lời giải.**

◊ **Bài 17.** Vẽ đồ thị của hàm số $y = |3x - 4|$.

🗨️ **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 18.** Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -3|x + 1|$.

🗨️ **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 19.** Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}|2x + 1| + \frac{3}{2}$.

🗨️ **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

BÀI TẬP TỔNG HỢP

◊ **Bài 20.** Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = |x| - 2|x + 1| + 1$.

🗨️ **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Bài 21.** Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = 2|x + 1| - |x - 1|$.

🗨️ **Lời giải.**

📁 Dạng 4. Vẽ đồ thị hàm số cho bởi hệ nhiều công thức

Vẽ đồ thị hàm số trùng với từng đồ thị hàm số thành phần tương ứng với điều kiện x ở phía sau.

⇨ **Ví dụ 16.** Vẽ đồ thị hàm số: $y = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

🗨️ **Lời giải.**

⇨ **Ví dụ 17.** Vẽ đồ thị hàm số: $y = \begin{cases} -2x + 3 & \text{nếu } x > 2 \\ -1 & \text{nếu } -3 \leq x \leq 2. \\ x + 2 & \text{nếu } x < -3 \end{cases}$

🗨️ **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 20.** Tìm giao điểm của 2 đường thẳng $d_1 : y = x - 5$ và $d_2 : y = 1 + 3x$.

💬 Lời giải.

--	--

🔗 **Ví dụ 21.** Tìm giao điểm của đường thẳng $d : y = 1 + 2x$ với

- Trục Ox .
- Trục Oy .

💬 Lời giải.

--	--

🔗 **Ví dụ 22.** Cho 2 đường thẳng: $d_1 : y = mx + 3$ và $d_2 : y = (2m + 1)x - 5$. Tìm m để

- $d_1 \parallel d_2$.
- d_1 cắt d_2 .

💬 Lời giải.

--	--

🔗 **Ví dụ 23.** Cho $d_1 : y = mx - m + 2$; $d_2 : y = (m - 3)x + m$. Tìm m để d_1 cắt d_2 tại 1 điểm trên trục tung.

💬 Lời giải.

--	--

🔗 **Ví dụ 24.** Cho $d_1 : y = 2x - 6$; $d_2 : y = -x + 3$.

- Tìm tọa độ giao điểm A của d_1 và d_2 .
- d_1 và d_2 cắt trục tung tại B và C . Tính diện tích ΔABC .

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

✧ **Bài 25.** Cho đường thẳng $d : y = (m^2 - 2)x + m - 1$. Xác định giá trị của m sao cho

- d song song với $d_1 : y = 2x + 1$.
- d cắt $d_2 : y = m(2x - 1) + 3 + x$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....

✧ **Bài 26.** Cho 2 đường thẳng: $(d_1) : y = (m + 2)x - 3$; $(d_2) : y = 4x + 2m + 1$. Tìm m để d_1 cắt d_2 tại 1 điểm trên trục tung.

💬 **Lời giải.**

.....
-------	-------

✧ **Bài 27.** Cho 3 đường thẳng: $(d_1) : y = 2x$; $(d_2) : y = x + 1$; $(d_3) : y = (m - 2)x + 2m + 1$. Tìm m để

- $d_1 \perp d_3$.
- d_1, d_2, d_3 đồng quy.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....

✧ **Bài 28.** Tìm m để 3 đường thẳng sau phân biệt và đồng quy.

- $d_1 : y = 2x, d_2 : y = -3 - x, d_3 : y = mx + 5$.
- $d_1 : y = -5(x + 1), d_2 : y = mx + 3, d_3 : y = 3x + m$.
- $d_1 : y = x + 2m, d_2 : y = 3x + 2, d_3 : y = -mx + 2$.

💬 **Lời giải.**

BÀI 3. HÀM SỐ BẬC HAI

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hàm số bậc hai

⇔ **Định nghĩa 3.1.** Hàm số bậc hai được cho bởi công thức $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Tập xác định của hàm số này là $D = \mathbb{R}$.

2. Đồ thị của hàm số bậc hai

⇔ **Định nghĩa 3.2.** Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) là một đường parabol có đỉnh là điểm $I\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$, có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$. Parabol này quay bề lõm lên trên nếu $a > 0$, xuống dưới nếu $a < 0$.

* Cách vẽ đồ thị hàm số bậc hai.

a) Xác định tọa độ của đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

b) Vẽ trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$.

c) Lập bảng giá trị

x	x_1	x_2	$-\frac{b}{2a}$	x_3	x_4
y	$y(x_1)$	$y(x_2)$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$y(x_3)$	$y(x_4)$

⚠ **Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) cắt trục tung tại điểm $(0; c)$.**

Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) cắt trục hoành (nếu có) tại điểm có tọa độ $(x_0; 0)$ với x_0 là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

d) Vẽ Parabol

⚠ **Khi vẽ cần chú ý đến dấu của hệ số a ($a > 0$ bề lõm quay lên trên, $a < 0$ bề lõm quay xuống dưới).**

3. Chiều biến thiên của hàm số bậc hai

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), ta có bảng biến thiên của nó trong hai trường hợp $a > 0$ và $a < 0$ như sau

+ Với $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$+\infty$

+ Với $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$-\infty$

Từ đó ta có định lí sau

⇨ **Định lí 3.1.** Nếu $a > 0$ thì hàm số $y = ax^2 + bx + c$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Nếu $a < 0$ thì hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

4. Phương trình hoành độ giao điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C_1) và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị là (C_2) . Khi đó, nếu $M(x; y)$ là giao điểm của (C_1) và (C_2) thì tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x). (*)$$

Phương trình (*) được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2) . Và nếu giao điểm M có mang những đặc điểm, tính chất nào đó thì phương trình (*) cũng sẽ tồn tại những đặc điểm tương ứng với các đặc tính đó. Từ đây suy ra, để giải một bài toán về tính chất giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2) , ta có thể tiến hành theo các bước sau:

- Lập phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và C_2 (tức là phương trình (*)).
- Biến đổi phương trình về dạng bậc hai đơn giản.
- Dựa vào điều kiện ban đầu của bài toán để chuyển về điều kiện cho phương trình hoành độ giao điểm.

5. Định lý Vi-ét

⇨ **Định lí 3.2.** Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

a) Nếu phương trình bậc hai có hai nghiệm x_1 và x_2 thì ta có:
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

b) Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $P < 0$.

c) Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

d) Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

🔗 **Bài 3.** Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$.

- Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số.
- Tìm các giá trị của x để $y > 0$ và $y < 0$.

💬 **Lời giải.**

📁 Dạng 2. Tìm tọa độ của đỉnh và các giao điểm của parabol với các trục tọa độ. Tọa độ giao điểm giữa parabol (P) và một đường thẳng.

Phương pháp:

- 🕒 Dựa vào các công thức cần nhớ để tìm tọa độ của đỉnh, giao điểm của parabol với các trục tọa độ. Tuy nhiên, khi tìm tọa độ của đỉnh I thì ta chỉ cần tìm hoành độ $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Rồi sau đó thế x_0 vào hàm số ban đầu để tìm $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ là tung độ của đỉnh I .
- 🕒 Dựa vào phương trình hoành độ giao điểm để xác định giao điểm của parabol (P) với đường thẳng.

🔗 **Ví dụ 4.** Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị là parabol (P). Tìm tọa độ của đỉnh, giao điểm của đồ thị với trục tung và trục hoành.

💬 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 5.** Cho hàm số $y = -x^2 - 3x + 1$ có đồ thị là parabol (P). Tìm tọa độ của đỉnh, giao điểm của đồ thị với trục tung và trục hoành.

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 8.** Cho parabol $y = -\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $y = x + m$. Với giá trị nào của m thì parabol và đường thẳng cắt nhau tại hai điểm phân biệt?

🗨️ Lời giải.

❖ **Bài 9.** Cho parabol $y = \frac{1}{2}x^2$. Tìm giá trị của m và n để đường thẳng $y = mx + n$ đi qua điểm $(0; -1)$ và tiếp xúc với parabol.

🗨️ Lời giải.

❖ **Bài 10.** Cho hai parabol $y = -x^2 + 2x + 3$ và $y = \frac{x^2}{2} - 4x + 3$. Tìm m để đường thẳng $y = m$ cắt cả hai parabol.

🗨️ Lời giải.

📁 Dạng 4. Xác định hàm số bậc hai khi biết các yếu tố liên quan.

Ta thực hiện theo các bước sau.

Bước 1: Giả sử parabol (P) : $y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

Bước 2: Dựa vào giả thiết đề bài để xác định a, b, c .

Một số giả thiết thường gặp ở bước này và cách xử lí.

🕒 Parabol đi qua điểm $M(x_0; y_0) \Rightarrow y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$.

🕒 Parabol có trục đối xứng $x = x_0 \Rightarrow x_0 = -\frac{b}{2a}$.

🕒 Parabol có đỉnh $I(x_0; y_0) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{b}{2a} \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$.

🕒 Parabol có giá trị nhỏ nhất (hoặc giá trị lớn nhất) bằng $y_0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases} \left(\text{hoặc} \begin{cases} a < 0 \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases} \right)$.

Bước 3: Kết luận.

❖ **Ví dụ 10.** Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 3$, biết rằng parabol đi qua hai điểm $A(1; 2)$ và $B(-2; 11)$.

🗨️ Lời giải.

.....

.....

⇔ **Ví dụ 11.** Cho parabol $(P) : y = -x^2 + bx + c$. Xác định b, c biết (P) đi qua điểm $M(-2; 4)$ và có trục đối xứng $x = -2$.

 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

⇔ **Ví dụ 12.** Cho parabol $(P) : y = ax^2 - 2x + c$. Xác định parabol (P) biết (P) có đỉnh $I(1; -3)$.

 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

⇔ **Ví dụ 13.** Cho parabol $(P) : y = ax^2 + bx + c$. Xác định a, b, c biết (P) có giá trị nhỏ nhất bằng -5 và đi qua hai điểm $M(1; -1), N(0; 4)$.

 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

⇔ **Ví dụ 14.** Cho hàm số $y = x^2 - mx + m + 1$ với $m \in \mathbb{R}$. Xác định m để đồ thị hàm số là parabol có đỉnh nằm trên đường thẳng $y = x$ sao cho hoành độ đỉnh không âm.

 **Lời giải.**

- ☑ Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến (*giảm*) trên khoảng $(-\infty; -\frac{b}{2a})$ và đồng biến (*tăng*) trên khoảng $(-\frac{b}{2a}; +\infty)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

- ☑ Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến (*tăng*) trên khoảng $(-\infty; -\frac{b}{2a})$ và nghịch biến (*giảm*) trên khoảng $(-\frac{b}{2a}; +\infty)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

🔗 **Ví dụ 17.** Xét sự biến thiên của hàm số $y = x^2 - 2x + 3$.

💬 **Lời giải.**

<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
---	---

🔗 **Ví dụ 18.** Xét tính đơn điệu của hàm số $y = -x^2 + 2x - 3$.

💬 **Lời giải.**

<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
--	--

⇔ **Ví dụ 19.** Xét tính đơn điệu của hàm số $y = x^2 + 2|x|$.

 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇔ **Ví dụ 20.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 + (m - 3)x + m$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇔ **Ví dụ 21.** Cho hàm số $y = (m - 1)x^2 + 4x - 5$ với $m \neq 1$. Tìm m sao cho hàm số đồng biến trên $(1; 7)$.

 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

⇔ **Bài 21.** Xét sự biến thiên của hàm số $y = x^2 - 6x - 5$.

 **Lời giải.**

⇔ **Bài 22.** Xét tính đơn điệu của hàm số $y = -x^2 + 2017$.

💬 Lời giải.

⇔ **Bài 23.** Xác định các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = x|x - 2|$.

💬 Lời giải.

⇔ **Bài 24.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^2 + (2m - 3)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -5)$.

💬 Lời giải.

⇔ **Bài 25.** Cho hàm số $y = (m - 1)x^2 + 4x - 5$ với $m \neq 1$. Tìm m sao cho hàm số nghịch biến trên $(-5; 2)$.

💬 Lời giải.

- ◊ **Bài 30.** a) Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 + 4x + 3$.
b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $x^2 - 4|x| + 3 = m$.

💬 Lời giải.

- ◊ **Bài 31.** Tìm m để phương trình $x|x - 1| = m$ có đúng 2 nghiệm.

💬 Lời giải.

✧ **Bài 5.** a) Tìm m để hàm số $y = \frac{2 - 5x}{x^2 - 4x + 2m - 1}$ xác định trên \mathbb{R} .

b) Chứng minh rằng đỉnh của pa-ra-bol $(P) : y = x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 5$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định. Tìm đường thẳng cố định đó.

🗨️ **Lời giải.**

B-ĐỀ SỐ 1B

✧ **Bài 1.** a) Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1 - 3x}$.

b) Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = x^4 + 5x^2$.

🗨️ **Lời giải.**

✧ **Bài 2.** Cho hàm số $y = 2x - m(x + 3)$ có đồ thị (d) . Tìm m để đường thẳng (d)

a) Đi qua gốc tọa độ.

b) Vuông góc với đường thẳng $(d') : y = \frac{1}{2}x + 3$.

🗨️ **Lời giải.**



🔗 **Bài 3.** Cho hàm số $y = -x^2 + 4x$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho.

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4|x|$.

 **Lời giải.**

Two large columns of dotted lines for writing the solution.



.....
-------	-------

◊ **Bài 4.** Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Lời giải.

.....
-------	-------

◊ **Bài 5.** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^3 + x^2 + x}{x^4 + 2x^2 + 1}$.

Lời giải.

.....
-------	-------

I – ĐỀ SỐ 5A

❖ Bài 1.

a) Tìm tập xác định của các hàm số sau.

$$1. y = \frac{x+2}{x^2-4x+3}$$

$$2. y = \frac{\sqrt{x}}{(x-1)(x+2)}$$

b) Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 6$.

💬 Lời giải.

❖ Bài 2. Tìm phương trình đường thẳng d biết

a) d đi qua hai điểm $M(-2; 2)$ và $N(4; -10)$.

b) d đi qua $A(2; 1)$ và song song với đường thẳng $\Delta: y = 2x + 1$.

💬 Lời giải.

❖ Bài 3.

a) Xác định tọa độ đỉnh và vẽ đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$;

b) Xác định parabol $P: y = ax^2 + bx + c$, biết P có đỉnh $I(2; -1)$ và đi qua điểm $D(3; 0)$.

💬 Lời giải.

🔗 Bài 3.

- a) Xác định tọa độ đỉnh và vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 3$;
- b) Xác định parabol $P : y = ax^2 + bx + c$, biết P có đỉnh $I(-2; -9)$ và đi qua điểm $D(-5; 0)$.

💬 Lời giải.

🔗 Bài 4. Cho parabol $P : y = x^2 + 3x$ và hai đường thẳng $d_1 : y = -x$ và $d_2 : y = x + m$

- a) Tìm tọa độ giao điểm của parabol P và đường thẳng d_1 ;
- b) Xác định giá trị của m để parabol P và đường thẳng d_2 có một điểm chung duy nhất M . Tìm tọa độ điểm M .

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 5.** Tìm tham số m .

- a) Biết hai điểm có hoành độ lần lượt là 1 và -3 thuộc đường thẳng $f(x) = mx + 2m - 4$ cùng nằm phía dưới trục hoành.
- b) Biết đồ thị hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 5$ ($m \neq 0$) có đỉnh thuộc đường thẳng $y = 2x - 3$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

BÀI 1. MỞ ĐẦU VỀ PHƯƠNG TRÌNH

A – TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Dạng 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình

Điều kiện xác định của phương trình (gọi tắt là điều kiện của phương trình) là những điều kiện cần của ẩn x để các biểu thức trong phương trình đều có nghĩa.

Các dạng thường gặp:

a) Điều kiện để biểu thức $\sqrt{f(x)}$ có nghĩa là $f(x) \geq 0$;

b) Điều kiện để biểu thức $\frac{1}{f(x)}$ có nghĩa là $f(x) \neq 0$;

c) Điều kiện để biểu thức $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ có nghĩa là $f(x) > 0$.

🔗 Ví dụ 1. Tìm điều kiện của các phương trình sau:

a) $\frac{1}{x+1} = 3$;

c) $\frac{1}{\sqrt{x+2}} = x+1$;

b) $\sqrt{x-5} = 1$;

d) $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-3} = x+5$.

💬 Lời giải.

<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
---	---

🔗 Ví dụ 2. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $\frac{3}{x^2-4} = \frac{\sqrt{3-x}}{3}$;

b) $\frac{2x-1}{\sqrt{x-3}} = \sqrt{1-x}$.

💬 Lời giải.

⇨ **Bài 2.** Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2 + 2x + 4} = x - 1;$

c) $\sqrt{5 - 2x} = \sqrt{x^2 + x + 1};$

b) $\frac{1}{x^2 + 1} = x - 3;$

d) $\frac{x + 1}{\sqrt{-x^2 + 4x - 5}} = x - 3.$

💬 **Lời giải.**

⇨ **Bài 3.** Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $\sqrt{5x - 1} + \sqrt{x + 2} = 7 - x;$

c) $\sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x} + \sqrt{2x - 5} = 2x^2 - 5x;$

b) $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{6 - x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0;$

d) $\sqrt[3]{x^2 - 1} + x = \sqrt{x^3 - 2}.$

💬 **Lời giải.**

⇨ **Bài 4.** Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:


a) $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3} = x^2+1$;

c) $\sqrt{\sqrt{2}-1-x} + \sqrt[4]{x} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$;

b) $x(x+1)(x-3)+3 = \sqrt{4-x} + \sqrt{1+x}$;

d) $\sqrt{1-x^2} = \left(\frac{2}{3} - \sqrt{x}\right)^2$.

 **Lời giải.**

 **Bài 5.** Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:


a) $3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} = 10 - 3x$;

c) $2\sqrt{1-x} + 3\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+x} - x + 3$;

b) $\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2} = 2\sqrt{x^2-4} - 2x + 2$;

d) $\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{x^2-x+1}$.

 **Lời giải.**

 **Bài 6.** Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $\frac{3x}{\sqrt{|x^2-1|}} = x+1$;

b) $\frac{2x+3}{x-3} = \frac{24}{x^2-9} + \frac{2(x+5)}{x+3}$.

 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Bài 7.** Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $2\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = 4;$

b) $\sqrt{\frac{6}{2-x}} + \sqrt{\frac{10}{3-x}} = 4.$

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Bài 8.** Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $\sqrt[4]{57-x} + \sqrt[4]{x+40} = 5;$

b) $\frac{\sqrt{x}-1}{|x|-3} = 0.$

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Bài 9.** Tìm m để phương trình $\frac{x^2+x}{x-m+3} = 1$ xác định trên $[-1; 1)$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Bài 10.** Tìm giá trị của m để các phương trình sau xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

a) $\sqrt{2x^2+m} = x-2;$

c) $\frac{x+1}{x^2-m+5} = x-3;$

b) $\frac{3x+1}{\sqrt{2x^2+4x+5-m}} = x-1;$

d) $\frac{3x-2}{mx^2+9} = x^3+2.$

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 10.** Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai?

a) $|x| = 2 \Leftrightarrow x = 2$

b) $x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0.$

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 11.** Cặp phương trình nào sau đây là tương đương?

a) $3x - \frac{21}{4} = 0$ và $4x - 7 = 0.$

b) $x^2 - 4x + 3 = 0$ và $-2x^2 + 8x - 6 = 0$

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 12.** Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai?

a) Cho phương trình $3x + \sqrt{x-2} = x^2$. Chuyển $\sqrt{x-2}$ sang về phải thì ta thu được phương trình tương đương.

b) Cho phương trình $3x + \sqrt{x-2} = x^2 + \sqrt{x-2}$. Lược bỏ $\sqrt{x-2}$ cả hai vế ta được phương trình tương đương.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 13.** Giải phương trình :

$$\frac{5x+3}{4} - x = \frac{|2x-3|}{2} \quad (3.1)$$

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 26.** Đúng hay sai?

a) $\sqrt{3-x} = 1 \Leftrightarrow 3-x = 1.$

b) $\sqrt{x-2} = 3-x \Leftrightarrow x-2 = (3-x)^2$

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 27.** Cách giải sau sai ở đâu?

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{x+3} &= \frac{1}{x+3} - 3 \\ \Leftrightarrow x + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+3} &= -3 \\ \Leftrightarrow x &= -3\end{aligned}$$

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 28.** Trong các phép biến đổi sau, phép biến đổi nào cho ta phương trình tương đương, phép biến đổi nào cho ta phương trình không tương đương?

a) Lược bỏ số hạng $\frac{4}{x-2}$ ở cả hai vế của phương trình $x^2 - 4x + \frac{4}{x-2} = \frac{4}{x-2} - 4.$

b) Lược bỏ số hạng $\frac{5}{x+2}$ ở cả hai vế của phương trình $x^2 + 1 + \frac{5}{x+2} = \frac{5}{x+2} + 2x.$

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 29.** Xác định m để các cặp phương trình sau đây tương đương với nhau?

a) $2x - 3 = 0$ và $\frac{2mx}{x-2} + 2m + 1 = 0.$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

✦ **Bài 35.** Giải các phương trình sau:

a) $(x^2 + x - 2)\sqrt{x+1} = 0$

c) $x + \frac{1}{x-2} = \frac{2x-3}{x-2}$

b) $\frac{x}{2\sqrt{x-3}} = \frac{2}{\sqrt{x-3}}$

d) $2x + \frac{3}{x-1} = \frac{3x}{x-1}$

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

✦ **Bài 36.** Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau:

a) $\sqrt{4-x} - 2 = \sqrt{x} - x$

b) $3\sqrt{x+2} = \sqrt{2-x} + 2\sqrt{2}$

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

◊ **Bài 2.** Giải và biện luận phương trình $m(x - 2m) = x + m + 2$. (1)

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 3.** Giải và biện luận phương trình $m^2x + 2 = x + 2m$. (1)

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 4.** Giải và biện luận phương trình $m^2x + 1 = (m - 1)x + m$. (1).

🗨️ Lời giải.

.....
.....

◊ **Bài 5.** Giải và biện luận phương trình $m^2x + 6 = 4x + 3m$. (1).

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 6.** Tìm giá trị tham số m để phương trình $m^2(mx - 1) = 2m(2x + 1)$ (1) có tập nghiệm là \mathbb{R} .

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 7.** Tìm giá trị tham số m để phương trình $m(x - m + 3) = 2(x - 2) + 6$ (1) có tập nghiệm là \mathbb{R} .

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 8.** Tìm giá trị tham số m để phương trình $m(x - m + 3) = 2(x - 2) + 6$ (1) có nghiệm duy nhất.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 9.** Tìm giá trị tham số m để phương trình $(m + 3)(x - m) = 2(x - 2)$ (1) vô nghiệm.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 10.** Tìm giá trị tham số m để phương trình $(m - 1)^2 x = 4x + m + 1$ (1) vô nghiệm.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 11.** Tìm giá trị tham số m để phương trình $m^2(x - 1) = 2(mx - 2)$ (1) có nghiệm duy nhất.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 12.** Tìm giá trị tham số m để phương trình $m^2(x - 1) = -4(mx + 1)$ (1) có nghiệm dương duy nhất.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....



--	--

BÀI TẬP TỔNG HỢP

◊ **Bài 13.** Giải và biện luận phương trình $(x - 1)(x - mx + 2) = 0$.

 **Lời giải.**

--	--

◊ **Bài 14.** Giải và biện luận phương trình $(x^2 - 4)(mx - 3) = 0$.

 **Lời giải.**

--	--

Dạng 2. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

Nguyên tắc cơ bản trong giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn là phải tìm cách làm mất dấu căn. Có các phương pháp thường dùng như: bình phương hai vế, đặt ẩn phụ, đưa phương trình về dạng tích, ...

Phương pháp 1. Bình phương hai vế.

Thiết lập điều kiện rồi sau đó bình phương hai vế.

$$\textcircled{v} \sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B. \end{cases}$$

$$\textcircled{v} \sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2. \end{cases}$$

Phương pháp 2. Đặt ẩn phụ.

Nhiều phương trình, việc bình phương không thể làm mất hết căn hoặc lại đưa về những phương trình bậc cao hơn hai. Những câu như vậy ta không nên bình phương hai vế mà nên sử dụng phương pháp khác. Sau đây là một số dạng hay gặp trong đặt ẩn phụ:

$$\textcircled{v} af(x) + b\sqrt{f(x)} = c. \text{ Đặt } \sqrt{f(x)} = t.$$

$$\textcircled{v} a(\sqrt{A} \pm \sqrt{B}) + b\sqrt{A \cdot B} = c \text{ (A, B là biểu thức của } x \text{)}. \text{ Đặt } \sqrt{A} \pm \sqrt{B} = t \Rightarrow \sqrt{A \cdot B} = \dots \text{ (Bình phương } t \text{ để đưa ra } \sqrt{A \cdot B} \text{)}.$$

Phương pháp 3. Đưa về dạng tích.

Nếu phương trình đưa được về tích ta có thể chuyển về các phương trình dễ giải hơn. Chúng ta có thể thực hiện theo một trong những hướng sau:

⊕ Ghép nhóm tạo ra nhân tử chung.

$$\textcircled{v} \text{Biến đổi liên hợp } \sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}.$$

⊕ Khi nhầm được nghiệm thì thêm bớt hệ số để liên hợp tạo ra nhân tử chung.

Phương pháp 1. Bình phương hai vế.

$$\Leftrightarrow \text{Ví dụ 5. Giải phương trình } \sqrt{2x-1} = \sqrt{x^2-3x}.$$

 **Lời giải.**

<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
--	--

$$\Leftrightarrow \text{Ví dụ 6. Giải phương trình } \sqrt{x^2-2x+5} = 3x-1.$$

 **Lời giải.**

<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
--	--

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 19.** Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x - 2} = 2$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Phương pháp 2. Đặt ẩn phụ.

◊ **Ví dụ 8.** Giải phương trình $2x^2 - 2x + \sqrt{(x+1)(x-2)} = 14$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Ví dụ 9.** Giải phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} + \sqrt{-x^2 + 4x - 3} = 3$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Ví dụ 10.** Giải phương trình $\sqrt[3]{x+7} + \sqrt{x+3} = 4$.

💬 **Lời giải.**



--	--

⇨ **Bài 23.** Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} + x + \sqrt{x^2 - x - 2} = 8$.

Lời giải.

--	--

⇨ **Bài 24.** Giải phương trình $\sqrt[3]{x-1} + 2\sqrt{x+2} = 5$.

Lời giải.

--	--

Phương pháp 3. Đưa về dạng tích.

⇨ **Ví dụ 11.** Giải phương trình $\sqrt{x-1} + 3\sqrt{3-x} - \sqrt{-x^2 + 4x - 3} = 3$.

Lời giải.

--	--

⇨ **Ví dụ 12.** Giải phương trình $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} = x^2 - 3x - 4$.

Lời giải.

--	--

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 3. Phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Nguyên tắc cơ bản trong giải phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối là phải tìm cách làm mất dấu giá trị tuyệt đối. Các phương pháp thường dùng là: biến đổi tương đương, chia khoảng trên trục số, ...

Phương pháp 1. Biến đổi tương đương.

Với $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số. Khi đó

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array} \right. \end{cases}$$

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| + |g(x)| = |f(x) + g(x)| \Leftrightarrow f(x).g(x) \geq 0$$


Phương pháp 2. Chia khoảng trên trục số

Ta lập bảng xét dấu của các biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối rồi xét các trường hợp để khử dấu giá trị tuyệt đối.

Một số cách khác

- Đặt ẩn phụ.
- Sử dụng bất đẳng thức ta so sánh $f(x)$ và $g(x)$ từ đó tìm nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$.
- Sử dụng đồ thị cần chú ý số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ là số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Phương pháp này thường áp dụng cho các bài toán biện luận nghiệm.

Phương pháp 1. Biến đổi tương đương.

 **Ví dụ 14.** Giải phương trình sau $|2x - 3| = 5 - x$.

 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....

 **Ví dụ 15.** Giải phương trình $|x - 2| = |3x + 2|$.

 **Lời giải.**



--	--

⇨ **Ví dụ 16.** Giải phương trình $|x - 2| + |x + 2| = |2x|$.

 **Lời giải.**

--	--

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

⇨ **Bài 28.** Giải phương trình $|x - 3| = 2x + 4$.

 **Lời giải.**

--	--

⇨ **Bài 29.** Giải phương trình $|x + 1| = |3x - 1|$.

 **Lời giải.**

--	--

⇨ **Bài 30.** Giải phương trình sau $|3x - 6| = 2x + 1$.

 **Lời giải.**

--	--

⇨ **Bài 31.** Giải phương trình $|x - 1| + |2x + 1| = |3x|$.

 **Lời giải.**

--	--



.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Một số cách khác

❖ **Ví dụ 20.** Giải phương trình $|x^2 - 4x + 2| = 2x^2 - 8x + 3$.

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Ví dụ 21.** Biện luận số nghiệm của phương trình $|x| + |x - 2| = m$.

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Ví dụ 22.** Giải phương trình $|x - 2016|^4 + |x - 2017|^5 = 1$.

Lời giải.

Loại 2. Phương trình trùng phương

Để giải phương trình trùng phương dạng $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (*) ta đặt $t = x^2 \geq 0$ để đưa về phương trình bậc hai $at^2 + bt + c = 0$ (*').

- ☑ Nếu phương trình (*') vô nghiệm hoặc chỉ có nghiệm âm thì phương trình (*) vô nghiệm.
- ☑ Nếu phương trình (*') có nghiệm $t = 0$ thì phương trình (*) có nghiệm $x = 0$.
- ☑ Nếu phương trình (*') có một nghiệm $t = t_0 > 0$ thì phương trình (*) có hai nghiệm $x = \pm\sqrt{t_0}$.

Loại 1. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

🔗 **Ví dụ 23.** Giải phương trình $\frac{x^2 + 3x + 4}{2x - 1} = \frac{x + 1}{2}$.

🗨️ **Lời giải.**

.....
-------	-------

🔗 **Ví dụ 24.** Giải phương trình $\frac{5x - 3}{3x + 5} = \frac{2x - 5}{x - 1}$.

🗨️ **Lời giải.**

.....
-------	-------

🔗 **Ví dụ 25.** Giải phương trình $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$ (*).

🗨️ **Lời giải.**

.....
-------	-------

.....
.....
.....
.....

⇔ **Ví dụ 29.** Giải phương trình $(1 - \sqrt{2})x^4 + 2x^2 - 1 - \sqrt{2} = 0$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....

⇔ **Ví dụ 30.** Tìm m để phương trình $x^4 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

⇔ **Bài 51.** Giải phương trình $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....

⇔ **Bài 52.** Giải phương trình $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....

⇔ **Bài 53.** Giải phương trình $x^4 + 24x^2 - 25 = 0$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....

⇔ **Bài 54.** Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m + 1 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2.

💬 **Lời giải.**



.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Bài 55.** Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - (m^2 + 10)x^2 + 9 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 8$.

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 5. Biện luận theo m có áp dụng định lí Viète

Định lí Viète

Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thì

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ngược lại, nếu hai số u và v có tổng $u + v = S$ và tích $uv = P$ thì u và v là các nghiệm của phương trình

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

❖ **Ví dụ 31.** Biết phương trình $x^2 + 2mx - 12 = 0$ có một nghiệm $x_1 = 3$. Tìm m và nghiệm còn lại.

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Ví dụ 32.** Biết phương trình $x^2 - x + m - 7 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1 < x_2$ và $x_2 - x_1 = 5$. Tìm m .

Lời giải.

.....
.....
.....

◊ Ví dụ 33. Cho phương trình $x^2 - 2mx - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tính theo m giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = x_1^2 + x_2^2$.

b) $B = x_1^3 + x_2^3$.

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....

◊ Ví dụ 34. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 4m + 3 = 0$ (1). Tìm m để phương trình (1).

a) có hai nghiệm trái dấu.

b) có hai nghiệm dương phân biệt.

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

◊ Bài 56. Tìm m để phương trình $x^2 - 9x + m = 0$ có một nghiệm là -3 . Khi đó tìm nghiệm còn lại.

🗨️ Lời giải.

.....
.....

◊ Bài 57. Cho phương trình $x^2 - (m+5)x - m + 6 = 0$ (1).

a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu.

b) Tìm m để phương trình (1) có một nghiệm $x = -2$. Tìm nghiệm còn lại.

c) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 13$.

🗨️ Lời giải.



.....
-------	-------

↔ **Bài 60.** Cho phương trình $mx^2 + 2(m - 4)x + m + 7 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - 2x_2 = 0$.

Lời giải.

.....
-------	-------

↔ **Bài 61.** Cho hàm số $y = x^2 - 2x + m$ có đồ thị (P) . Tìm m để (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OA = 5OB$.

Lời giải.

.....
-------	-------

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

⇔ **Bài 65.** Giải phương trình $2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}$

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

⇔ **Bài 66.** Giải phương trình $\sqrt{x+2} = x^2 + 2x - 2$

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

⇔ **Bài 67.** Giải phương trình $\sqrt{2+x} = \frac{-x^2 - x + 2}{x}$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

⇔ **Bài 68.** Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 2x + 5} + \sqrt{2x^2 - 2x + 25} = \sqrt{8x^2 + 8}$.

💬 **Lời giải.**



Dotted writing area for the first problem.

Dotted writing area for the first problem.

◊ Bài 72. Giải phương trình: $2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$.

💬 Lời giải.

Dotted writing area for the solution of Bài 72.

Dotted writing area for the solution of Bài 72.

◊ Bài 73. Giải phương trình: $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) = 360$.

💬 Lời giải.

Dotted writing area for the solution of Bài 73.

Dotted writing area for the solution of Bài 73.

✎ **Bài 74.** Giải phương trình: $x^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3x - 2}$.

💬 Lời giải.

<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
--	--

✎ **Bài 75.** Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = 3x$.

💬 Lời giải.

<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
--	--

✎ **Bài 76.** Giải phương trình: $2\sqrt[9]{(1+x)^2} + 3\sqrt[9]{1-x^2} + \sqrt[9]{(1-x)^2} = 0$.

💬 Lời giải.

<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
---	---

✎ **Bài 77.** Giải phương trình: $2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 + 1}$.

💬 Lời giải.

<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
--	--

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 78.** Tìm m để phương trình $mx^2 - 2(3 - m)x + m - 4 = 0$ có đúng một nghiệm âm.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 79.** Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tìm điều kiện cần và đủ để phương trình có một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 80.** Giải phương trình $\sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} = 1$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 81.** Tìm m để phương trình $x^2 + 2(m+1)x + 2m + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Khi đó hãy lập phương trình bậc hai có nghiệm $\frac{1}{x_1^2}$ và $\frac{1}{x_2^2}$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 82.** Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $|x^2 - 4x + 1| = m$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 83.** Tìm m để phương trình $4x^4 + 4x^2 + 2mx + m^2 + 2m + 1 = 0$.

- Có nghiệm lớn nhất.
- Có nghiệm nhỏ nhất.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn

Khái niệm 2. Phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là

$$ax + by = c \quad (1),$$

trong đó a, b, c là các hệ số, với điều kiện a và b không đồng thời bằng 0.

- !**
- a) Nếu $a = b = c = 0$ thì (1) có vô số nghiệm (mọi cặp số $(x_0; y_0)$ đều là nghiệm).
 - b) Nếu $a = b = 0, c \neq 0$ thì (1) vô nghiệm.
 - c) Nếu $b \neq 0$ thì (1) có dạng $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ (d). Khi đó $(x_0; y_0)$ là nghiệm của (1) $\Leftrightarrow M(x_0; y_0)$ thuộc đường thẳng (d).

Tổng quát, phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c, (a^2 + b^2 \neq 0)$ luôn có vô số nghiệm. Biểu diễn hình học tập nghiệm của phương trình là một đường thẳng trong mặt tọa độ Oxy.

2. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Khái niệm 3. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng tổng quát là

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \quad (2),$$

trong đó x, y là hai ẩn; các chữ còn lại là hệ số. Nếu cặp số $(x_0; y_0)$ đồng thời là nghiệm của cả hai phương trình của hệ thì $(x_0; y_0)$ được gọi là nghiệm của hệ phương trình (2). Giải hệ phương trình (2) là tìm tập nghiệm của nó.

3. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn

Khái niệm 4. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát là

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases} \quad (3),$$

trong đó x, y, z là ba ẩn; các chữ còn lại là hệ số. Nếu bộ ba số $(x_0; y_0; z_0)$ nghiệm đúng cả ba phương trình của hệ thì $(x_0; y_0; z_0)$ được gọi là nghiệm của hệ phương trình (3).

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đại số

1. Quy tắc thế

Quy tắc thế dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương. Quy tắc thế gồm hai bước sau:

- ✔ Bước 1: Từ một phương trình của hệ đã cho (coi là phương trình thứ nhất), ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình thứ hai để được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn).
- ✔ Bước 2: Dùng phương trình mới để thay thế cho phương trình thứ hai trong hệ (và giữ nguyên phương trình thứ nhất).

Tóm tắt cách giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

- ✔ Bước 1: Dùng quy tắc thế biến đổi hệ phương trình đã cho để được một hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình một ẩn.
- ✔ Bước 2: Giải phương trình một ẩn vừa có, rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.
Chú ý: Nếu thấy xuất hiện phương trình có các hệ số của hai ẩn đều bằng 0 thì hệ phương trình đã cho có thể có vô số nghiệm hoặc vô nghiệm.


2. Quy tắc cộng đại số

Quy tắc cộng đại số dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương. Quy tắc cộng đại số gồm hai bước:

- ✔ Bước 1: Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ phương trình đã cho để được một phương trình mới.
- ✔ Bước 2: Dùng phương trình mới ấy thay thế cho một trong hai phương trình của hệ (và giữ nguyên phương trình kia).

Tóm tắt cách giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

- ✔ Bước 1: Nhân các vế của hai phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.
- ✔ Bước 2: Sử dụng quy tắc cộng đại số để được hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0 (tức là phương trình một ẩn).
- ✔ Bước 3: Giải phương trình một ẩn vừa thu được rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

 **Ví dụ 1.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x - 3y = 7. \end{cases}$$

 **Lời giải.**

<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
--	--

❖ **Ví dụ 2.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2\sqrt{x+5} + \sqrt{y-8} = 11 \\ 5\sqrt{x+5} - 4\sqrt{y-8} = 8. \end{cases}$$

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 3.** Ngày sinh nhật của cô giáo A gồm hai chữ số, biết rằng tổng của hai chữ số đó là 8. Nếu viết ngày sinh nhật theo thứ tự ngược lại thì được một số bằng 4 lần số ban đầu cộng thêm 3. Vậy ngày sinh nhật của cô giáo A là bao nhiêu?

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 4.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 2x - 3y = 0. \end{cases}$$

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 5.** Nếu đem $\frac{1}{5}$ số trâu và $\frac{1}{3}$ số bò gộp lại thì được 25 con. Nếu đem $\frac{2}{5}$ số trâu và $\frac{1}{4}$ số bò gộp lại thì được 30 con. Tính số trâu và số bò.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

⇨ **Bài 1.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (\sqrt{3} + 1)x + y = \sqrt{3} - 1 \\ 2x - (\sqrt{3} - 1)y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Bài 2.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 4y = 10. \end{cases}$$

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Bài 3.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{10}{4x - y} + \frac{1}{x + y} = 1 \\ \frac{25}{4x - y} + \frac{3}{x + y} = 2. \end{cases}$$

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....

◇◇ **Bài 6.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{3x} + \frac{3}{5y} = 4 \\ \frac{3}{2x} + \frac{1}{5y} = 2. \end{cases}$$

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◇◇ **Bài 7.** Cho đường thẳng $d : y = ax + b$ ($a \neq 0$). Viết phương trình của d biết nó đi qua hai điểm $A(3;2), B(1;-2)$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◇◇ **Bài 8.** Một bài kiểm tra có 15 câu hỏi. Mỗi câu trả lời đúng được cộng 5 điểm. Mỗi câu trả lời sai hoặc bỏ trống bị trừ 5 điểm. Một học sinh làm bài kiểm tra và đạt 25 điểm. Hỏi bạn đó đã trả lời đúng bao nhiêu câu?

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◇◇ **Bài 9.** Có 2 loại xe khách (loại I và loại II). Nếu chọn phương án vận chuyển hành khách bằng 2 chuyến xe loại I và 5 chuyến xe loại II thì vận chuyển được tối đa 190 hành khách (không tính tài xế). Nếu

⚠ *Chú ý*

- ☑ *Cách giải hệ dạng tam giác: từ phương trình cuối ta tìm z , thay vào phương trình thứ hai ta tìm được y và cuối cùng thay y, z vào phương trình thứ nhất ta tìm được x .*
- ☑ *Nếu trong quá trình biến đổi ta thấy xuất hiện phương trình chỉ có một ẩn thì ta giải tìm ẩn đó rồi thay vào hai phương trình còn lại để giải hệ hai phương trình hai ẩn.*
- ☑ *Ta có thể thay đổi thứ tự các phương trình trong hệ để việc biến đổi dễ hơn.*

↔ **Ví dụ 6.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 2y + z = 10 \\ y - z = 5 \\ 2z = 4. \end{cases}$$

💬 *Lời giải.*

--	--

↔ **Ví dụ 7.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x - y + z = -3 \\ 3x + 2y + 3z = 6 \\ 2x - y - 4z = 3. \end{cases}$$

💬 *Lời giải.*

--	--

↔ **Ví dụ 8.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 2x + y - z = -1 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$

💬 *Lời giải.*

--	--

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

◇◇ Bài 11. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x - y + 5z = -8 \\ 2y + z = -2 \\ -3z = 6 \end{cases}$$

💬 Lời giải.

.....

.....

◇◇ Bài 12. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y - z = 6 \\ 3y = 9 \\ 2x - z = 5 \end{cases}$$

💬 Lời giải.

.....

.....

◇◇ Bài 13. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} -x - y + z = 3 \\ 3x + y - z = -5 \\ 2x + 3y - 5z = -14 \end{cases}$$

💬 Lời giải.

.....

.....

◇◇ Bài 14. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z = 19 \\ 3x + y - 3z = -9 \\ 2x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

💬 Lời giải.

.....

.....

◇◇ Bài 15. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 5x - y + 2z = 20 \\ 2x + 2y - z = 23 \\ x + y - z = 11 \end{cases}$$

💬 Lời giải.

.....

.....

◊ Bài 16. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{6}{z} = 1 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{3}{z} = \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

🗨️ Lời giải.

◊ Bài 17. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = -11 \\ \frac{2}{x} - \frac{2y+4}{y} + \frac{1}{z} = -7 \\ -\frac{3}{x} + \frac{1}{y} + \frac{-2-z}{z} = -6 \end{cases}$$

🗨️ Lời giải.

❖ **Bài 18.** Một cửa hàng bán quần, áo và nón. Ngày thứ nhất bán được 3 cái quần, 7 cái áo và 10 cái nón, doanh thu là 1930000 đồng. Ngày thứ hai bán được 5 cái quần, 6 cái áo và 8 cái nón, doanh thu là 2310000 đồng. Ngày thứ ba bán được 11 cái quần, 9 cái áo và 3 cái nón, doanh thu là 3390000 đồng. Hỏi giá bán mỗi quần, mỗi áo, mỗi nón là bao nhiêu?

 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 3. Giải và biện luận hệ 2 phương trình bậc nhất 2 ẩn có chứa tham số (PP Crame)

a) **Dạng:**
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (a_1^2 + b_1^2 \neq 0) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (a_2^2 + b_2^2 \neq 0). \end{cases}$$

Cách giải đã biết: Phép thế, phép cộng...

b) **Giải và biện luận hệ phương trình:**

Bước 1: Tính các định thức:

- $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ (Gọi là định thức của hệ);

- $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$ (Gọi là định thức của x);

- $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$ (Gọi là định thức của y).

Bước 2: Biện luận

- Nếu $D \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất
$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} \\ y = \frac{D_y}{D}. \end{cases}$$

- Nếu $D = 0$ và $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$ thì hệ vô nghiệm.

- Nếu $D = D_x = D_y = 0$ thì hệ có vô số nghiệm (tập nghiệm của hệ là tập nghiệm của phương trình $a_1x + b_1y = c_1$).

❖ **Ví dụ 11.** Giải và biện luận hệ phương trình:
$$\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2. \end{cases}$$

 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

❖ **Bài 19.** Giải và biện luận hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} (m-1)x + 2y = 3m-1 \\ (m+2)x - y = 1-m. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} ax + by = a^2 + b^2 \\ by + ax = 2ab. \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} m\sqrt{x+1} + \sqrt{y} = m+1 \\ \sqrt{x+1} + m\sqrt{y} = 2. \end{cases}$$

❖ **Bài 20.** Tìm m để hệ sau vô nghiệm:
$$\begin{cases} 2m^2x + 3(m-1)y = 3 \\ m(x+y) - 2y = 2. \end{cases}$$

❖ **Bài 21.** Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} mx + 2y = 3 \\ x + my = 1 \end{cases}$$
. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa $x > 1, y > 1$.

❖ **Bài 22.** Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + m^2y = m + 1 \\ m^2x + y = 3 - m \end{cases}$$
. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho $S = x + y$ đạt giá trị lớn nhất.

 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Bài 23.** Cho
$$\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$$
. Chứng minh $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

 **Lời giải.**



Dotted lines for writing on the left side of the page.

Dotted lines for writing on the right side of the page.

◊ Bài 29. Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất và tìm nghiệm duy nhất đó.

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 2 \quad (*) \\ x + y + mz = 4. \end{cases}$$

 Lời giải.

Dotted lines for writing on the left side of the page.

Dotted lines for writing on the right side of the page.

◀▶ **Bài 2.** Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ x^2 + 3xy + 4y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$$

💬 **Lời giải.**

◀▶ **Bài 3.** Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y^2 + xy + 1 = x^2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \sqrt{2x + 5y - 1} - \sqrt{x - 2y} = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

💬 **Lời giải.**



Dotted lines for writing on the left side of the page.

Dotted lines for writing on the right side of the page.

- ⚠** *Chú ý: 1. Đối với hệ đối xứng của hai ẩn x, y thì nếu $(x_0; y_0)$ là nghiệm thì $(y_0; x_0)$ cũng là nghiệm của hệ.*
- 2. Có một số hệ phương trình không phải là hệ đối xứng loại 1, tuy nhiên ta có thể chọn biến phù hợp để đổi biến đưa về hệ đối xứng loại 1.*

↔ **Ví dụ 5.** Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x^2 + x = \frac{14}{3}y, \\ x^3 = 5y^2. \end{cases}$$

💬 Lời giải.

Dotted lines for writing the solution on the left side of the page.

Dotted lines for writing the solution on the right side of the page.



◊ **Bài 6.** Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x + 2y + 2xy = 5, \\ x^2 + 4y^2 = 5. \end{cases}$$

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 7.** Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 6xy^2 = 9, \\ x^2 + 4y^4 = 5. \end{cases}$$

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 8.** Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{y} = 2, \\ x + 2y = 2. \end{cases}$$

Lời giải.

.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 9.** Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 2, \\ 2x + \sqrt[3]{x^2 - y^2} = 3. \end{cases}$$

Lời giải.

.....
.....

⇨ **Bài 10.** Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 4y - 1, \\ x^3 + x^2y + x - 3y = 0. \end{cases}$$


 **Lời giải.**

⇨ **Bài 11.** Tìm tập giá trị thực của tham số m để hệ sau có nghiệm
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2, \\ xy(x+2)(y+2) = m. \end{cases}$$

 **Lời giải.**

C – HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI 2


⇨ **Định nghĩa 4.2.** Hệ phương trình đối xứng loại 2 là hệ phương trình có dạng
$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f(y, x) = 0. \end{cases}$$

 Nếu hệ phương trình có nghiệm là (a, b) thì nó cũng có nghiệm (b, a) .

Dạng 1. Giải hệ phương trình đối xứng loại 2.

Phương pháp giải hệ phương trình đối xứng loại 2:

$$f(x, y) - f(y, x) = 0 \Leftrightarrow (x - y)h(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ h(x, y) = 0. \end{cases}$$

 Thường thì $h(x, y)$ là những phương trình dễ dàng tìm ra mối liên hệ giữa x và y ; hoặc $h(x, y)$ là phương trình vô nghiệm.

⇨ **Ví dụ 8.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 2018x = 2017y \\ y^2 - 2018y = 2017x. \end{cases}$$

 **Lời giải.**



Dotted writing area on the left side of the page.

Dotted writing area on the right side of the page.

⇔ Ví dụ 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 2 = 3y \\ y^3 + 2 = 3x. \end{cases}$

 Lời giải.

Dotted writing area for the solution on the left side.

Dotted writing area for the solution on the right side.

◊ Ví dụ 11. Tìm điều kiện của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x - 2y = m\frac{y}{x} \\ y - 2x = m\frac{x}{y} \end{cases}$$

🗨️ Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

◊ Bài 12. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x - xy = \frac{1}{3}y \\ 4y - xy = \frac{1}{3}x \end{cases}$

🗨️ Lời giải.



Two large columns of dotted lines for writing, separated by a vertical line.

D – HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP

⇔ **Định nghĩa 4.3.** Biểu thức $f(x,y)$ được gọi là biểu thức đẳng cấp bậc 2 nếu $f(mx,my) = m^2 f(x,y)$.



--	--

❖ **Ví dụ 20.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+1)^2(xy+2x) = 12, \\ xy+x = 2. \end{cases}$$

Lời giải.

--	--

❖ **Ví dụ 21.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{2x+3y-1} - \sqrt{x+6y-2} + x - 3y + 1 = 0, \\ x^2 + 9y^2 - 6xy + 4x - 9y = 0. \end{cases}$$

Lời giải.

--	--



--	--

⇨ **Bài 26.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2xy + x - 2 = 0, \\ 2x^3 - 2x^2y + x^2 + 4y^2 - 4xy - 2y = 0. \end{cases}$$

Lời giải.

--	--

⇨ **Bài 27.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 2xy + 4y + 1 = 0, \\ -y^3 + 4xy^2 - 4x^2y + 7y = 2(4x^2 + 1). \end{cases}$$

Lời giải.

--	--

⇨ **Bài 28.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 4x + 2y, \\ x^2 + 3y^2 = 4. \end{cases}$$

Lời giải.

⇨ **Bài 31.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 9x^2y = 108, \\ xy^2 + y^3 = 4. \end{cases}$$

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Bài 32.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 9 = 0, \\ x^2 + 2y^2 - x - 4y = 0. \end{cases}$$

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Bài 33.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + \frac{16xy}{x+2y} = 16, \\ \sqrt{x+2y} = x^2 - 2y. \end{cases}$$

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

BÀI TẬP TỔNG HỢP

⇨ **Bài 34.** Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x(y-3) - 9y = 1, \\ (x-1)^2y^2 + 2y = -1. \end{cases}$$

💬 **Lời giải.**



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

◊ **Bài 35.** Tìm tập giá trị thực của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = m, \\ x + y = 3m. \end{cases}$$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

◊ **Bài 36.** Giải phương trình: $x^2 + 3x - 1 = 4\sqrt{x^3 - x^2 + 2x - 2}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

⇨ **Bài 37.** Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} mx^3 - mx^2y + 7xy^2 - 3y^3 = 4 \\ 2xy^2 - y^3 = 1. \end{cases}$$

 Tìm m để hệ phương trình đã cho có đúng hai nghiệm.

💬 **Lời giải.**

⇨ **Bài 38.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3(2 + 3y) = 8, \\ x(y^3 - 2) = 6. \end{cases}$$

💬 **Lời giải.**

BÀI 5. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG III

A – ĐỀ SỐ 1A

⇨ **Câu 1.** (2 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 2 - x$.

🗨️ **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Câu 2.** (2 điểm) Tìm m sao cho phương trình $(x - 1)((m + 1)x^2 - 2x + 1) = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

🗨️ **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Câu 3.** (2 điểm) Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 5x + 4} = |x + 1| + 1$.

🗨️ **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Câu 4.** (2 điểm) Tìm m sao cho hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ mx - y + 2z = 2 \\ x + (1 - m)y + z = -2 \end{cases}$$

🗨️ **Lời giải.**



.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Câu 5.** (2 điểm) Giải phương trình $x^3 - x^2 + 1 = \sqrt{2x - 1}$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

B – ĐỀ SỐ 1B

❖ **Câu 1.** (2 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{x+1} = 5 - x$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Câu 2.** (2 điểm) Tìm m sao cho phương trình $(x - 2)(mx^2 - x + 2) = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Câu 3.** (2 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy - x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Câu 2.** (2 điểm) Giải phương trình:

$$x - \sqrt{2x+7} = 4. \quad (3.5)$$

💬 **Lời giải.**

❖ **Câu 3.** (2 điểm) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z & = -2 \\ -2x + 5y + z & = 5 \\ 3x - 7y + 4z & = 8. \end{cases} \quad (3.6)$$

💬 **Lời giải.**

❖ **Câu 4.** (2 điểm) Tìm giá trị của tham số m để phương trình:

$$mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0 \quad (3.7)$$

có hai nghiệm phân biệt. Tìm hai nghiệm đó.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....

↔ **Câu 2.** (2 điểm) Giải phương trình $|2x - 1| = |x + 1|$.

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....

↔ **Câu 3.** (2 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{3x^2 - 3x + 3} = 1 - 2x$.

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

↔ **Câu 4.** (2 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x - 3y - 12xy = 4 \\ 4x^2 + 9y^2 - 18xy = 5 \end{cases}$$

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

↔ **Câu 5.** (2 điểm) Giải phương trình $\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x - 2} = \sqrt{3(x^2 - 2x - 2)}$.

💬 Lời giải.

.....
-------	-------



.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

BÀI 1. BẤT ĐẲNG THỨC

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Các khái niệm

Khái niệm 5 (Bất đẳng thức). Cho hai số thực a, b . Các mệnh đề “ $a > b$ ”, “ $a < b$ ”, “ $a \geq b$ ”, “ $a \leq b$ ” được gọi là các bất đẳng thức.

Khái niệm 6 (Bất đẳng thức cùng chiều, trái chiều). Cho bốn số thực a, b, c, d .

Các bất đẳng thức “ $a > b$ ”, “ $c > d$ ” được gọi là bất đẳng thức cùng chiều.

Các bất đẳng thức “ $a > b$ ”, “ $c < d$ ” được gọi là bất đẳng thức trái chiều.

Khái niệm 7 (Bất đẳng thức hệ quả). Nếu mệnh đề “ $a > b \Rightarrow c > d$ ” đúng thì ta nói bất đẳng thức “ $c > d$ ” là bất đẳng thức hệ quả của bất đẳng thức “ $a > b$ ” và viết $a > b \Rightarrow c > d$.

Khái niệm 8 (Bất đẳng thức tương đương). Nếu bất đẳng thức “ $a > b$ ” là hệ quả của bất đẳng thức “ $c > d$ ” và ngược lại thì ta nói hai bất đẳng thức tương đương với nhau và viết $a > b \Leftrightarrow c > d$.

2. Tính chất

Tính chất		Tên gọi
Điều kiện	Nội dung	
	$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	Cộng hai vế của bất đẳng thức với một số.
$c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	Nhân hai vế của bất đẳng thức với một số.
$c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	
	$a < b$ và $c < d \Rightarrow a + c < b + d$	Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều.
$a > 0, c > 0$	$a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$	Nhân hai bất đẳng thức cùng chiều.
$n \in \mathbb{N}^*$	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	Nâng hai vế của bất đẳng thức lên một lũy thừa.
$n \in \mathbb{N}^*$ và $a > 0$	$a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}$	
$a > 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$ $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	Khai căn hai vế của một bất đẳng thức.

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Sử dụng phép biến đổi tương đương

Để chứng minh một bất đẳng thức ta có thể sử dụng các cách sau:

- + Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với một bất đẳng thức đã biết.
- + Sử dụng một bất đẳng thức đã biết, biến đổi để dẫn đến bất đẳng thức cần chứng minh.

Một số bất đẳng thức thông dụng:

- + $a^2 \geq 0$;
- + $a^2 + b^2 \geq 0$;
- + $a \cdot b \geq 0$, với $a, b \geq 0$;
- + $a^2 + b^2 \geq \pm 2ab$.

🔗 **Ví dụ 1.** Chứng minh $\sqrt{1-x} + \sqrt{x+2} \leq \sqrt{6}, \forall x \in [-2; 1]$.

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....

🔗 **Ví dụ 2.** Chứng minh $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a + b)$, với mọi số thực a, b .

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....

🔗 **Ví dụ 3.** Cho các số thực x, y, z . Chứng minh các bất đẳng thức sau:
a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$;
b) $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$.

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Ví dụ 4.** Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$, với $a, b \geq 0$;

b) $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$, với $a, b \in \mathbb{R}$.

🗨️ **Lời giải.**

⇨ **Ví dụ 5.** Cho a, b là các số thực thỏa mãn $ab \geq 1$. Chứng minh $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$.

🗨️ **Lời giải.**

⇨ **Ví dụ 6.** Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$. Chứng minh:

$$\frac{x+y}{2x-y} + \frac{y+z}{2z-y} \geq 4.$$

🗨️ **Lời giải.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

⇨ **Bài 1.** Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3$.

🗨️ **Lời giải.**

◀ **Bài 5.** Cho $a, b \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$. Chứng minh $\left| \frac{\tan a - \tan b}{1 - \tan a \tan b} \right| < 1$.

🗨️ **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

📁 **Dạng 2. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si**

Khi gặp các bất đẳng thức, trong đó có chứa *tổng, tích của các số không âm*, ta có thể áp dụng những bất đẳng thức sau đây để chứng minh:

a) Bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm.

Cho $a \geq 0$ và $b \geq 0$, ta có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Các dạng khác của bất đẳng thức trên:

$$+ a + b \geq 2\sqrt{ab}, (a \geq 0, b \geq 0);$$

$$+ ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, (\forall a, b);$$

$$+ ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}, (\forall a, b);$$

$$+ a^2 + b^2 \geq 2ab, (\forall a, b).$$

b) Bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm.

Cho $a \geq 0, b \geq 0$ và $c \geq 0$, ta có: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Các dạng khác của bất đẳng thức trên:

$$+ a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}, (\forall a, b, c \geq 0);$$

$$+ abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3, (\forall a, b, c \geq 0);$$

$$+ abc \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}, (\forall a, b, c \geq 0);$$

$$+ a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc, (\forall a, b, c \geq 0).$$

c) Tổng quát, nếu $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ thì:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Đấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n \geq 0$.

Chú ý:

◊ Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu a, b cùng dấu thì $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ và a, b trái dấu thì $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$.

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2 = 1$ thì $|a + b| \leq \sqrt{2}$.

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ Ví dụ 4. Chứng minh với ba số $a, b, c \geq 0$ thì $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$. Dấu bằng của đẳng thức xảy ra khi nào?

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ Ví dụ 5. Cho a, b dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$(a + b)(1 + ab) \geq 4ab.$$

Dấu bằng đẳng thức xảy ra khi nào?

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

✧ **Bài 1.** Cho a, b, c dương. Chứng minh bất đẳng thức

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Dấu bằng đẳng thức xảy ra khi nào?

💬 Lời giải.

✧ **Bài 2.** Cho a, b, c dương. Chứng minh bất đẳng thức

$$(a+1)(b+1)(a+c)(b+c) \geq 16abc.$$

Dấu bằng đẳng thức xảy ra khi nào?

💬 Lời giải.

✧ **Bài 3.** Chứng minh rằng với mọi a thì:

$$\frac{a^2+6}{\sqrt{a^2+2}} \geq 4.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

⇨ **Bài 1.** Biết x, y là 2 số thực dương thỏa mãn $x + 2\sqrt{2}y = 5$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^4 + y^4$.

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Bài 2.** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $A = \sqrt{1-2x} + 3\sqrt{1+x}$

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Bài 3.** Giải phương trình $\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} = x^2 - 10x + 27$.

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....

📁 Dạng 4. Sử dụng các bất đẳng thức hệ quả

Ta có thể sử dụng Bất đẳng thức Bunhiacopxki cho nhiều số, hoặc trong những bài toán có mẫu, ta có thể sử dụng Bất đẳng thức cộng mẫu.

⇨ **Ví dụ 1.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{1-2x} + 4\sqrt{1+x}$

💬 Lời giải.

🔗 **Bài 3.** Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq \sqrt{(a+x)^2 + (b+y)^2 + (c+z)^2}, \forall x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

💬 **Lời giải.**

📁 Dạng 5. Chứng minh bất đẳng thức dựa vào tọa độ véc-tơ

🔗 **Ví dụ 1.** Chứng minh rằng: $\sqrt{(a+c)^2 + b^2} + \sqrt{(a-c)^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2 + b^2}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$.

💬 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 2.** Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2 + 4b^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 + 4b^2 - 2a - 12b + 10} \geq 5$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$.

💬 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 3.** Tìm GTNN của $P = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}$.

💬 **Lời giải.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

🔗 **Bài 1.** Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{a^2 + ac + c^2} \geq \sqrt{c^2 + cb + b^2}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 2.** Chứng minh rằng: $\sqrt{(a-b)^2 + c^2} + \sqrt{(a+b)^2 + c^2} \geq 2\sqrt{c^2 + a^2}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$.

🗨️ Lời giải.

❖ **Bài 3.** Chứng minh rằng: $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}, a > c > 0, b > c$.

🗨️ Lời giải.

❖ **Bài 4.** Tìm GTNN của $P = \sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.

🗨️ Lời giải.

❖ **Bài 5.** Tìm GTNN của $P = \sqrt{x^2 + 10x + 26} + \sqrt{x^2 + 4x + 5}$.

🗨️ Lời giải.

📁 Dạng 6. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối

❖ **Ví dụ 1.** Chứng minh $\frac{|a-b|}{1+|a-b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$.

🗨️ Lời giải.

❖ **Ví dụ 2.** Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $|ax^2 + bx + c| \leq 1, \forall |x| \leq 1$.
Chứng minh rằng $|a| + 2|b| + 3|c| \leq 7$.

🗨️ Lời giải.

❖ Ví dụ 3. Tìm GTNN của biểu thức $A = |x + 2017| + |x - y - 6| + |2x - y + 44|$.

💬 Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

❖ Bài 1. Tìm GTNN của $A = |x + 5| + |2x - 7| + |3x + 12|$.

💬 Lời giải.

❖ Bài 2. Tìm GTNN của $A = |x - 1| + |y - 2| + |z - 3|$ với $|x| + |y| + |z| = 2017$

💬 Lời giải.

❖ Bài 3. Cho các số thực thỏa mãn $|a + b + c| \leq 1$, $|a - b + c| \leq 1$, $|4a + 2b + c| \leq 8$, $|4a - 2b + c| \leq 8$. Chứng minh rằng: $|a| + 3|b| + |c| \leq 7$.

💬 Lời giải.

❖ Bài 4. Chứng minh $\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a| + |b|}{1 + |a| + |b|}$.

💬 Lời giải.

❖ Bài 5. Chứng minh rằng: Nếu $|a| < 1$, $|b - 1| < 10$, $|a - c| < 10$ thì $|ab - c| < 20$.

💬 Lời giải.

BÀI 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

⇔ **Định nghĩa 2.1.** Bất phương trình bậc nhất một ẩn là bất phương trình (bpt) sau khi thu gọn có dạng $ax + b > 0, ax + b < 0, ax + b \geq 0, ax + b \leq 0$ trong đó a, b là các số thực với $a \neq 0$ và x là ẩn số.

1. Giải và biện luận bất phương trình $ax + b > 0$

☑ Với $a > 0$, bpt $\Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$. Tập nghiệm của bpt là $S = \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$;

☑ Với $a < 0$, bpt $\Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$. Tập nghiệm của bpt là $S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$;

☑ $a = 0$, bpt thành $0x + b > 0$. Ta xét hai trường hợp:

$b \leq 0$, tập nghiệm của bpt là $S = \emptyset$;

$b > 0$, tập nghiệm của bpt là $S = \mathbb{R}$.

2. Giải và biện luận bất phương trình $ax + b \leq 0$

☑ Với $a > 0$, bpt $\Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a}$. Tập nghiệm của bpt là $S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right]$;

☑ Với $a < 0$, bpt $\Leftrightarrow x \geq -\frac{b}{a}$. Tập nghiệm của bpt là $S = \left[-\frac{b}{a}; +\infty\right)$;

☑ $a = 0$, bpt thành $0x + b \leq 0$. Ta xét hai trường hợp:

$b \leq 0$, tập nghiệm của bpt là $S = \mathbb{R}$;

$b > 0$, tập nghiệm của bpt là $S = \emptyset$.

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giải bất phương trình bậc nhất một ẩn

Xét bất phương trình bậc nhất một ẩn dạng: $ax + b > 0$ (*)

• Nếu $a > 0$ thì bất phương trình (*) có các nghiệm $x > -\frac{b}{a}$ hay bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$.

• Nếu $a < 0$ thì bất phương trình (*) có các nghiệm $x < -\frac{b}{a}$ hay bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.

Các bất phương trình dạng $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$ có cách giải tương tự.

Các bất phương trình khác ta biến đổi bất phương trình về dạng $ax + b > 0$ (hoặc về dạng $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$).

❖ Ví dụ 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $3x - 1 \geq 0$.

b) $2x + 3 < 4x - 5$.

c) $(x - 3)(2x + 5) \leq 2x^2 + 4x - 7$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{3 - 2x}{x^2 + 1} \geq 0$.

b) $\frac{x^2 + 3x - 2}{x^2 + 2x + 3} < \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 3}$.

💬 Lời giải.

◀▶ **Bài 3.** Giải các bất phương trình sau:

$$\text{a) } 3 - \frac{2x+1}{5} > x + \frac{3}{4}.$$

$$\text{c) } 2 + \frac{3(x+1)}{8} < 3 - \frac{x-1}{4}.$$

$$\text{b) } -2x + \frac{3}{5} > \frac{3(2x-7)}{3}.$$

$$\text{d) } \frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} < 2 + \frac{x}{6}.$$

💬 **Lời giải.**

◀▶ **Bài 4.** Giải các bất phương trình sau:

$$\text{a) } \frac{x+2}{x^2+2} \geq 0.$$

$$\text{c) } \frac{2x-3}{x^2+x+1} \leq \frac{4x+3}{x^2+x+1}.$$

$$\text{b) } \frac{3(x-1)-2}{x^2+4x+5} < 0.$$

$$\text{d) } \frac{x^2+x+2}{4x^2+4x+2} > \frac{(x+1)(x-2)}{4x^2+4x+2}.$$

💬 **Lời giải.**

Các bất phương trình dạng $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$ có cách giải và biện luận tương tự.
 Các bất phương trình khác ta biến đổi bất phương trình về dạng $ax + b > 0$ (hoặc về dạng $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$).

🔗 **Ví dụ 1.** Giải và biện luận bất phương trình $mx + 6 > 2x + 3$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

🔗 **Ví dụ 2.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(m^2 - 4m + 3)x + 2m - 4 < 0$ vô nghiệm.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

🔗 **Ví dụ 3.** Giải và biện luận bất phương trình $\sqrt{x-1}(x-m+2) > 0$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

🔗 **Bài 1.** Giải và biện luận bất phương trình $(1 - m)x - 2m > -2x - 6$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....

--	--

❖ **Bài 6.** Định m để hàm số $y = \sqrt{(m+3)x+m-5}$ xác định với mọi $x \in [0;5]$.

 **Lời giải.**

--	--

❖ **Bài 7.** Tìm m để bất phương trình $\sqrt{5-x}[(m^2+3)x-4m] \geq 0$ có tập nghiệm là $[1;5]$.

 **Lời giải.**

--	--

❖ **Bài 8.** Định m để hai bất phương trình sau tương đương

a) $x - 9 < 0$ và $5mx - 3m - 42 < 0$;

b) $3mx + 2 - 2m > 0$ và $(3m - 1)x + 3 - 2m > 0$.

 **Lời giải.**

--	--

Dạng 4. Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

Khi cho một hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn thì tập hợp nghiệm của hệ là giao của các tập hợp nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

 **Các bước thực hành giải toán:**

1. Tìm điều kiện của hệ (nếu có).

2. Biến đổi để đưa hệ bất phương trình về dạng đặc trưng $\begin{cases} a_1x + b_1 \leq 0 & (1) \\ a_2x + b_2 \leq 0 & (2) \end{cases}$.
3. Giải từng bất phương trình trong hệ. Gọi S_1, S_2 lần lượt là tập nghiệm của phương trình (1), (2) trong hệ.
4. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = S_1 \cap S_2$.

❖ **Ví dụ 6.** Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ 5 - 2x \geq 0 \end{cases}$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....

❖ **Ví dụ 7.** Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} 2x - \frac{3}{5} < \frac{7 - 2x}{3} \\ 2x - 1 < 5(3x - 1) \end{cases}$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

❖ **Bài 9.** Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} (x - 1)(x + 2) \leq 2x^2 - x - (x + 3)(x - 1) \\ x - 1 < 0 \end{cases}$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....

❖ **Bài 10.** Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} 3x - 1 \leq x + 5 \\ 2x - 1 < x^2 - (x - 1)(x + 1) \end{cases}$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....

❖ **Bài 11.** Giải hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 6x + \frac{5}{7} < 4x + 7 \\ \frac{8x + 3}{2} < 2x + 5 \end{cases}.$$

 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Bài 12.** Giải hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x-3}{\sqrt{x-4}} > 0 \\ x < 2(x+1) \end{cases}.$$

 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 5. Giải và biện luận hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

Giải và biện luận hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} a_1x + b_1 \leq 0 \\ a_2x + b_2 \leq 0 \end{cases} (I).$$

- ☑ Xét các trường hợp tồn tại dấu của a_1 và a_2 .
- ☑ Với mỗi trường hợp riêng biệt nhận được ở trên, thông thường ta có các trường hợp sau:

— **TH1:** Nếu $a_1, a_2 > 0$. Khi đó $(I) \Leftrightarrow x \leq \min \left\{ -\frac{b_1}{a_1}, -\frac{b_2}{a_2} \right\}$.

— **TH2:** Nếu $a_1, a_2 < 0$. Khi đó $(I) \Leftrightarrow x \geq \max \left\{ -\frac{b_1}{a_1}, -\frac{b_2}{a_2} \right\}$.

— **TH3:** Nếu $a_1 > 0; a_2 < 0$. Khi đó $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{b_1}{a_1} \\ x \geq -\frac{b_2}{a_2} \end{cases}$.

Hệ có nghiệm điều kiện là: $-\frac{b_2}{a_2} \leq -\frac{b_1}{a_1}$.

Khi đó nghiệm của hệ là: $-\frac{b_2}{a_2} \leq x \leq -\frac{b_1}{a_1}$.

— **TH4:** Nếu $a_1 = 0$ hoặc $a_2 = 0$. Khi đó thay trực tiếp giá trị tham số vào hệ (I) .

❖ **Ví dụ 8.** Tìm tất cả các giá trị của m để hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} x + m \leq 0 \\ -x + 3 < 0 \end{cases}$$
 có nghiệm.

 **Lời giải.**



--	--

❖ **Ví dụ 9.** Tìm m để hệ bất phương trình: $\begin{cases} x + 4m^2 \leq 2mx + 1 \\ 3x + 2 > 2x - 1 \end{cases}$ có nghiệm.

💬 Lời giải.

--	--


❖ **Ví dụ 10.** Tìm m để hệ bất phương trình: $\begin{cases} mx + 9 < 3x + m^2 \\ 4x + 1 < -x + 6 \end{cases}$ vô nghiệm.

💬 Lời giải.

--	--

⇨ **Bài 16.** Với giá trị nào của m thì hệ $\begin{cases} mx + 6 > 2x + 3m \\ m(x - m) < x - 1 \end{cases}$ có nghiệm.

 **Lời giải.**

 **Dạng 6.** Tìm giá trị của tham số để hệ bất phương trình có tập nghiệm thỏa điều kiện cho trước

⇨ **Ví dụ 11.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x - m + 1 > 0 \\ m + 2 - x \geq 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình

- Nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; -1)$.
- Có duy nhất một nghiệm thuộc $[1; 3)$.
- Có nghiệm thuộc $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$.

 **Lời giải.**

⇔ **Bài 17.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 2m - 1 > 0 \\ 6m - 2 - x \geq 0. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ có nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; 3]$.

💬 **Lời giải.**

⇔ **Bài 18.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + m > 2 \\ (m - 1)x - m^2 + 4m - 3 > 0. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ

- Có nghiệm thuộc $(-\infty; 2)$.
- Có nghiệm thuộc $[-1; 3]$.
- Nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 3]$.

💬 **Lời giải.**

⇔ **Bài 19.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} mx - 1 < 0 \\ (3m - 2)x - m < 0. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để



.....
.....

⇔ **Bài 22.** Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + m - 1 \leq 0 \\ \frac{2x}{\sqrt{1 - 2x} + \sqrt{1 + 2x}} \geq \frac{m + 1}{\sqrt{1 - 2x} + \sqrt{1 + 2x}} \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ có nghiệm.

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

BÀI 3. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Nhị thức bậc nhất

⇨ **Định nghĩa 3.1.** Nhị thức bậc nhất đối với x là biểu thức dạng $f(x) = ax + b$ trong đó a, b là hai số đã cho, $a \neq 0$.

⇨ Ví dụ 1.

- a) $-2x + 3$ là nhị thức bậc nhất đối với x .
- b) $7y - 9$ là nhị thức bậc nhất đối với y .
- c) $5u$ là nhị thức bậc nhất đối với u .

2. Định lý về dấu của nhị thức bậc nhất

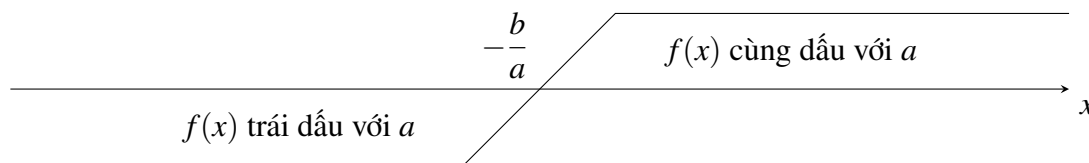
⇨ **Định lý 3.1.** Nhị thức $f(x) = ax + b$ có giá trị cùng dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$, trái dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.

☑ Các kết quả của định lý trên được thể hiện qua bảng sau

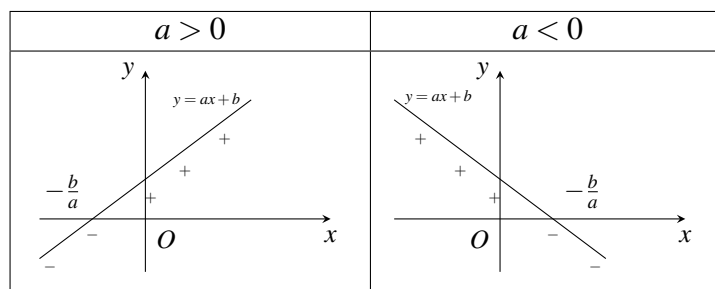
x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	trái dấu với a		0 cùng dấu với a

Ta gọi bảng này là *bảng xét dấu* nhị thức $f(x) = ax + b$.

☑ Biểu diễn trên trục số



☑ Minh họa bằng đồ thị



⚠ Định lý trên có thể rút gọn bằng một trong hai quy tắc sau: **phải cùng trái trái** hoặc **trước trái sau cùng**.



.....

↔ **Bài 13.** Xét dấu của biểu thức sau: $f(x) = (2x - m)(x + m)$

Lời giải.

.....

↔ **Bài 14.** Xét dấu của biểu thức sau: $f(x) = \frac{2 - x}{x - 2m + 1}$

Lời giải.

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Ví dụ 16.** Giải bất phương trình $(x+2)^2(x-1)(x+3) < 0$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Ví dụ 17.** Giải bất phương trình $x^3 + x^2 - 5x + 3 \leq 0$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

⇨ **Bài 15.** Giải bất phương trình $(x-3)(\sqrt{2}-x) > 0$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

✎ **Bài 16.** Giải bất phương trình $(3 - 2x)(x - 4) \leq 0$.

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

✎ **Bài 17.** Tìm tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

✎ **Bài 18.** Giải bất phương trình $(x + 1)(x - 2)(3 - x) < 0$.

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

📁 Dạng 4. Giải bất phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Dạng. $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \frac{P(x)}{Q(x)} < 0, \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$, với $P(x), Q(x)$ là tích của các nhị thức bậc nhất.

Phương pháp. Lập bảng xét dấu của biểu thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$ để từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho.

✎ **Ví dụ 18.** Giải bất phương trình $\frac{2 - x}{3x + 6} < 0$.

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....



..... |

◊ Ví dụ 26. Giải bất phương trình $|2x - 4| \geq 2$.

🗨️ Lời giải.

..... |

◊ Ví dụ 27. Giải bất phương trình $\left| \frac{x + 3}{2} \right| < \left| \frac{6 - 2x}{5} \right|$.

🗨️ Lời giải.

..... |

◊ Ví dụ 28. Giải bất phương trình $\frac{|x - 1|}{x^2 + 3x - 4} \geq 2$.

🗨️ Lời giải.

..... |



--	--

⇔ **Bài 28.** Giải bất phương trình $2|x - 4| + 3|1 + x| - |x| \leq 3$.

 **Lời giải.**

--	--

⇔ **Bài 29.** Giải bất phương trình $|x - |x - 1|| < 2$.

 **Lời giải.**

--	--

BÀI TẬP TỔNG HỢP

⇔ **Bài 30.** Giải bất phương trình $\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$.

 **Lời giải.**

--	--

BÀI 4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

⇨ **Định nghĩa 4.1.** Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là

$$ax + by \leq c \quad (1)$$

$$(ax + by < c; ax + by \geq c; ax + by > c)$$

trong đó a, b, c là những số thực đã cho, a và b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm bất phương trình (1) được gọi là **miền nghiệm** của nó.

⚠ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đường thẳng $ax + by = c$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng, một trong hai nửa mặt phẳng đó là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$, nửa mặt phẳng kia là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \geq c$.

2. Hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn

⇨ **Định nghĩa 4.2.** Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn gồm một số bất phương trình bậc nhất 2 ẩn x, y mà ta phải tìm các nghiệm chung của chúng. Mỗi nghiệm chung đó được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Cũng như bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta có thể *biểu diễn hình học tập nghiệm* của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Biểu diễn tập nghiệm bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Quy tắc biểu diễn hình học tập nghiệm (hay biểu diễn miền nghiệm) của bất phương trình $ax + by \leq c$ như sau:

Bước 1. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường thẳng $\Delta: ax + by = c$.

Bước 2. Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0)$ **không** thuộc Δ (lấy tọa độ có nhiều số 0 nhất có thể)

Bước 3. Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh với c .

Bước 4. Kết luận

Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng kể cả bờ Δ chứa M_0 là miền nghiệm của $ax + by \leq c$.

Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng kể cả bờ Δ **không** chứa M_0 là miền nghiệm của $ax + by \leq c$.

⚠ Miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ bỏ đi đường thẳng $ax + by = c$ là miền nghiệm của phương trình $ax + by < c$.

⇨ **Ví dụ 1.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $3x + y \geq 3$.

🗨️ Lời giải.

❖ **Bài 5.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} x - 2y < 1 \\ x + 3y > -2 \\ -x + y < 2 \end{cases}$$

❖ **Bài 6.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} 3x + y \leq 5 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

❖ **Bài 7.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} 3x + y \geq 9 \\ x > y - 2 \\ 3y \geq 4 - x \\ y \leq 5 \end{cases}$$

❖ **Bài 8.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 1 < 0 \\ x - \frac{2y}{3} \leq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

❖ **Bài 9.** Xác định hình tính của đa giác biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} 2x + y \geq 1 \\ x - 2y \geq -2 \\ 2x + y \leq 5 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 10.** Xác định hình tính của đa giác biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} x + 4y \geq 9 \\ x + 4y \leq 17 \\ x - 4y \geq -7 \\ x - 4y \leq 1 \end{cases}$$

💬 **Lời giải.**



một chiếc xe loại B cho thuê với giá 3 triệu. Biết rằng mỗi xe loại A có thể chở tối đa 20 người và 0,6 tấn hàng; mỗi xe loại B có thể chở tối đa 10 người và 1,5 tấn hàng. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí bỏ ra là ít nhất?

Lời giải.

Two columns of dotted lines for writing the solution.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

↔ **Bài 16.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x - y > 1 - 3x$.

Lời giải.

Two columns of dotted lines for writing the solution.



✎ **Bài 17.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $3x - y \leq 0$.

💬 **Lời giải.**

✎ **Bài 18.** a) Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x + y - 3 < 0$.
b) Tìm điều kiện của m và n để mọi điểm thuộc đường thẳng (d') : $(m^2 - 2)x - y + m + n = 0$ đều là nghiệm của bất phương trình trên.

💬 **Lời giải.**

✎ **Bài 19.** Cho bất phương trình $2x + y - 1 \leq 0$.

a) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình đã cho trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Tìm tất cả giá trị tham số m để điểm $M(m, 1)$ nằm trong miền nghiệm của bất phương trình đã và biểu diễn tập hợp M tìm được trong cùng hệ trục tọa độ Oxy ở câu a).

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Bài 20.** Cho bất phương trình $x - 2y + 4m > 0$.

- a) Tùy theo giá trị tham số m , hãy biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình đã cho trong hệ trục tọa độ Oxy .
- b) Gọi A, B lần lượt là giao của đường thẳng $x - 2y + 4m = 0$ với trục hoành và trục tung. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình đã cho chứa điểm $C(2; 1)$ sao cho diện tích tam giác ABC bằng 4.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Bài 21.** Cho hệ bất phương trình
$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x - y \geq 0 \\ x + y - 4 \leq 0 \end{cases}$$

- a) Biểu diễn tập nghiệm của hệ đã cho trong mặt phẳng tọa độ Oxy .
- b) Tính diện tích miền nghiệm đó.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Bài 22.** Tìm m để hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - y \leq 0 \\ y - mx - 2 \leq 0 \end{cases}$$

có tập nghiệm được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là một hình tam giác.

💬 **Lời giải.**

BÀI 5. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tam thức bậc hai

⇨ **Định nghĩa 5.1.** Tam thức bậc hai là biểu thức có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những hệ số, $a \neq 0$. Nghiệm của tam thức bậc hai là giá trị của x làm cho tam thức có giá trị bằng 0.

2. Định lí về dấu của tam thức bậc hai

⇨ **Định lí 5.1.** Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0, \Delta = b^2 - 4ac$. Khi đó:

- ☉ $\Delta < 0 \Rightarrow af(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- ☉ $\Delta = 0 \Rightarrow af(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$ và $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$.
- ☉ $\Delta > 0 \Rightarrow \begin{cases} af(x) > 0, \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty) \\ af(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2) \end{cases}$.

Với $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $f(x) = 0, x_1 < x_2$.

3. Định lí về dấu của tam thức bậc hai

⇨ **Định nghĩa 5.2.** Bất phương trình bậc hai một ẩn số là bất phương trình có dạng $ax^2 + bx + c > 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c > 0; ax^2 + bx + c \geq 0; ax^2 + bx + c \leq 0$) với a, b, c là những số thực đã cho, $a \neq 0, x$ là ẩn số.

4. Bất phương trình bậc hai một ẩn

⇨ **Định nghĩa 5.3.** Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình dạng $ax^2 + bx + c < 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c \leq 0, ax^2 + bx + c > 0, ax^2 + bx + c \geq 0$), trong đó a, b, c là những số thực đã cho, $a \neq 0$.

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xét dấu tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$. Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$.

- ☉ Nếu $\Delta < 0$ thì $a.f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- ☉ Nếu $\Delta = 0$ thì $a.f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$.
- ☉ Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ và
 - $a.f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.
 - $a.f(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2)$

◊ Ví dụ 1. Xét dấu tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 2x + 5$

🗨️ Lời giải.

..... |

◊ Ví dụ 2. Xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 5x - 6$.

🗨️ Lời giải.

..... |

..... |

..... |

..... |

..... |

◊ Ví dụ 3. Xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 3x + 4$.

🗨️ Lời giải.

..... |

..... |

..... |

..... |

..... |

◊ Ví dụ 4. Xét dấu của biểu thức $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x - 1}$

🗨️ Lời giải.

..... |

..... |

..... |

..... |

..... |

..... |

..... |

..... |

..... |

..... |

❖ **Ví dụ 5.** Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - (2m - 1)x + m^2 - m$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) < 0$ với $\forall x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

❖ **Bài 1.** Xét dấu tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Bài 2.** Xét dấu tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 - 4x - 6$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Bài 3.** Xét dấu của biểu thức $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Bài 4.** Xét dấu của biểu thức $f(x) = 1 + \frac{x - 6}{x^2 - 5x + 6}$

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....

◊ Ví dụ 3. Cho $f(x) = mx^2 - x - 1$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) < 0$ với mọi giá trị của x .

🗨️ Lời giải.

◊ Ví dụ 4. Cho $f(x) = (m - 4)x^2 + (2m - 8)x + m - 5$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) \leq 0$ với mọi giá trị của x .

🗨️ Lời giải.

◊ Ví dụ 5. Cho $f(x) = \sqrt{x^2 - x + m} - 1$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) > 0$ với mọi giá trị của x .

🗨️ Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

◊ Bài 1. Cho $f(x) = (2m^2 - 3m - 2)x^2 + 2(m - 2)x - 1$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

🗨️ Lời giải.



--	--

⇨ **Ví dụ 7.** Giải bất phương trình $-2x^2 + 3x + 5 > 0$.

Lời giải.

--	--

⇨ **Ví dụ 8.** Giải bất phương trình $(3x^2 - 10x + 3)(4x - 5) \geq 0$.

Lời giải.

--	--

⇨ **Ví dụ 9.** Giải bất phương trình $\frac{(3x^2 - x)(3 - x^2)}{4x^2 + x - 3} \leq 0$.

Lời giải.

--	--



↔ **Bài 4.** Giải bất phương trình $-2x^2 + 3x + 5 \geq 0$.

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

↔ **Bài 5.** Giải bất phương trình $x^2 + 12x + 36 \leq 0$.

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

↔ **Bài 6.** Giải bất phương trình $(3x^2 - 4x)(2x^2 - x - 1) > 0$.

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

↔ **Bài 7.** Giải bất phương trình $(4x^2 - 1)(-8x^2 + x - 3)(2x + 9) < 0$.

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

◊ **Bài 8.** Giải bất phương trình $\frac{4x^2 + 3x - 1}{x^2 + 5x + 7} \geq 0$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

◊ **Bài 9.** Giải bất phương trình $\frac{5x^2 + 3x - 8}{x^2 - 7x + 6} \leq 0$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

◊ **Bài 10.** Giải bất phương trình $\frac{x^4 - 17x^2 + 60}{x(x^2 - 8x + 5)} > 0$.

💬 **Lời giải.**

◇◇ **Bài 15.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $x^2 - (m - 2)x - 8m + 1 \geq 0$ có nghiệm.

💬 Lời giải.

◇◇ **Bài 16.** Tìm giá trị của m để biểu thức $f(x) = x^2 - (m + 2)x + 2m$ có giá trị không âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

💬 Lời giải.

[Vũ Văn Trường]

◇◇ **Bài 17.** Tìm giá trị của m để hàm số $f(x) = \sqrt{mx^2 + 2(m + 1)x + m - 1}$ có tập xác $D \neq \emptyset$.

💬 Lời giải.

◇◇ **Bài 18.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta luôn có:

$$-1 \leq \frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 7$$

💬 Lời giải.

◇◇ **Bài 19.** Chứng minh rằng hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + 5x + 4 \leq 0 \\ x^2 - (m + 3)x + 2(m + 1) \leq 0 \end{cases}$ luôn có nghiệm.

💬 Lời giải.

BÀI 6. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG IV

A – ĐỀ SỐ 1A

↔ **Bài 1. (2 điểm)** Giải các bất phương trình sau:

a) $8x - 5 > \frac{15x - 8}{2}$.

b) $\frac{1 - 3x}{1 + 2x} \leq -2$.

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

↔ **Bài 2. (2 điểm)** Giải bất phương trình $x^2 - x + |3x - 2| > 0$.

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

↔ **Bài 3. (4 điểm)** Cho biểu thức $f(x) = (m + 1)x^2 - 2(2m + 1)x + 1$ (m là tham số)

a) Tìm các giá trị m để phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

b) Tìm các giá trị m để bất phương trình $f(x) > 0$ có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....



.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⚡ **Bài 4. (2 điểm)** Chứng minh rằng $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b + c)$ với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....

B – ĐỀ SỐ 1B

⚡ **Bài 1. (2 điểm)** Giải các bất phương trình sau
a) $\frac{4x - 6}{7} < x + 3$.
b) $\frac{2 - x}{1 - 2x} \geq 3$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⚡ **Bài 2. (2 điểm)** Giải bất phương trình $|x^2 + 3x - 4| - x + 8 \geq 0$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....



⇨ **Bài 3. (4 điểm)** Cho biểu thức $f(x) = (m - 1)x^2 - 2(2m + 1)x - 1$ (m là tham số).

- a) Tìm các giá trị m để phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.
- b) Tìm các giá trị m để bất phương trình $f(x) < 0$ có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

.....
-------	-------

⇨ **Bài 4. (2 điểm)** Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq a + b + 1$.

Lời giải.

.....
-------	-------

C-ĐỀ SỐ 2A

⇨ **Bài 1.** Cho $x > 3$. Chứng minh rằng: $9x + \frac{4}{x-3} \geq 39$.

Lời giải.

D – ĐỀ SỐ 2B

✦ **Bài 1.** Cho $x > 1$. Chứng minh rằng: $16x + \frac{4}{x-1} \geq 32$.

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

✦ **Bài 2.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 4(x+1) + 5 \leq 3(x+4) \\ x+m \geq 1 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

✦ **Bài 3.** Giải bất phương trình $|x - 3| > 3x + 15$.

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

✦ **Bài 4.**

a) Tìm m để biểu thức $f(x) = -2x^2 + 2(m - 2)x + m - 2$ luôn âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Chứng minh rằng $2x^2 - 8xy + 13y^2 - 4x - 2y + 7 \geq 0$ với mọi x , mọi y .

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Câu 4.** (1 điểm) Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho phương trình $2x^2 - 2mx + m = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Câu 5.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + \frac{3}{x}$ với $x > 0$.

 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....

H – ĐỀ SỐ 4B

⇨ **Câu 1.** Giải các bất phương trình

a) $\frac{x}{3} - 1 < \frac{x}{2} - 3.$

b) $2 - \frac{x}{x-2} < \frac{1}{x-2}$

 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Câu 2.** Giải các bất phương trình

a) (1 điểm) $-x^2 + 6x - 8 > 0$

b) (1 điểm) $|x + 2| < 2x + 1$

🗨️ Lời giải.

❖ **Câu 3.**

a) (2 điểm) Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 + x - 2} > x - 1$.

b) (1 điểm) Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho bất phương trình $-x^2 + (m + 2)x - 1 < 0$ có tập nghiệm là \mathbb{R} .

🗨️ Lời giải.

❖ **Câu 4.** (1 điểm) Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho phương trình $x^2 + 2(m + 1)x + m = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt.

🗨️ Lời giải.

◊ **Câu 5.** Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{b+2} + \frac{b^2}{c+2} + \frac{c^2}{a+2}$$

🗨️ **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

BÀI 1. BẢNG PHÂN BỐ TẦN SỐ VÀ TẦN SUẤT

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Bảng phân bố tần số và tần suất

Giả sử dãy n số liệu thống kê đã cho có k giá trị khác nhau ($k \leq n$). Gọi x_i là một giá trị bất kì trong k giá trị đó, ta có:

- ☑ Số lần xuất hiện giá trị x_i trong dãy số liệu đã cho được gọi là **tần số** của giá trị đó, kí hiệu là n_i .
- ☑ Số $f_i = \frac{n_i}{n}$ được gọi là **tần suất** của giá trị x_i .

2. Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp

Giả sử dãy n số liệu thống kê đã cho được phân vào k lớp ($k < n$). Xét lớp thứ i ($i = 1, 2, \dots, k$) trong k lớp đó, ta có:

- ☑ Số n_i các số liệu thống kê thuộc lớp thứ i được gọi là **tần số của lớp** đó.
- ☑ Số $f_i = \frac{n_i}{n}$ được gọi là **tần suất của lớp** thứ i .

⚠ Trong các bảng phân bố tần suất, tần suất được tính ở dạng tỉ số phần trăm.

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Bảng phân bố tần số và tần suất

Bảng phân bố tần số gồm hai dòng (hoặc hai cột). Dòng (cột) đầu ghi các giá trị khác nhau của mẫu số liệu. Dòng (cột) thứ hai ghi tần số (số lần xuất hiện của mỗi giá trị trong các số liệu thống kê) tương ứng. Nếu bổ sung dòng (cột) thứ ba ghi tần suất (tỉ số % giữa tần số và tổng số liệu thống kê) thì ta được bảng phân bố tần số và tần suất.

Để lập bảng phân bố tần số và tần suất từ bảng số liệu thống kê ban đầu, ta thực hiện các bước sau:

- ☑ Sắp thứ tự các giá trị trong các số liệu thống kê;
- ☑ Tính tần số n_i của các giá trị x_i bằng cách đếm số lần x_i xuất hiện;
- ☑ Tính tần suất f_i của x_i theo công thức $f_i = \frac{n_i}{n}$;
- ☑ Đặt các số liệu x_i, n_i, f_i vào bảng ta thu được bảng phân bố tần số và tần suất.

↔ **Ví dụ 4.** Kết quả điểm thi môn Toán của 2 lớp 10A1 và 10A2 được cho bởi bảng số liệu sau

Lớp 10A1

Điểm thi	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	5	4	2	26	4	4	45

Lớp 10A2

Điểm thi	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	7	5	6	15	4	1	47

Hãy lập bảng phân bố tần suất kết quả điểm thi môn Toán của hai lớp 10A1 và 10A2. Tìm lớp có điểm 7 chiếm tỉ lệ hơn 50%.

💬 **Lời giải.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

↔ **Bài 4.** Trong một kì thi học sinh giỏi toán (thang điểm là 20), kết quả được cho ở bảng sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Lập bảng phân bố tần suất dựa vào số liệu ở bảng trên. Hỏi có bao nhiêu phần trăm thí sinh được chọn vào vòng trong biết rằng điều kiện để vào vòng trong là phải trên 16 điểm?

💬 **Lời giải.**

🔗 **Bài 5.** Trong sổ theo dõi bán hàng ở một cửa hàng bán xe máy có bảng sau:

Số xe bán trong ngày	0	1	2	3	4	5
Tần số	2	13	15	12	7	3

Biết mỗi chiếc xe bán được cửa hàng có lãi 5 triệu đồng, mỗi ngày cửa hàng mất 2 triệu đồng chi phí thuê nhân viên và cơ sở vật chất. Hỏi trong khoảng thời gian đó cửa hàng lãi (hay lỗ) bao nhiêu?

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

🔗 **Bài 6.** Điều tra về số tiền mua sách (đơn vị: nghìn đồng) trong một năm của 50 sinh viên, người ta thu được bảng số liệu thống kê sau

203	37	141	43	55	303	252	758	321	123
425	27	72	87	215	358	521	863	284	279
608	302	703	68	149	327	127	125	489	234
498	968	350	57	75	503	712	440	185	404
98	552	101	612	333	451	901	875	789	202

Từ bảng số liệu thống kê trên, người ta lập bảng phân bố tần số ghép lớp như sau

Lớp	Tần số
[0; 99]	10
[100; 199]	7
[200; 299]	7
[300; 399]	7
[400; 499]	6
[500; 599]	3
[600; 699]	2
[700; 799]	4
[800; 899]	2
[900; 999]	2
Cộng	$n = 50$

Xét tập 20% sinh viên dùng nhiều tiền để mua sách nhất. Người mua ít nhất trong nhóm này mua hết bao nhiêu tiền?

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

❖ **Bài 7.** Một học sinh ghi lại bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp của một mẫu số liệu như sau

Lớp	[1; 9]	[10; 19]	[20; 29]	[30; 39]	[40; 49]	
Tần số						$n =$
Tần suất (%)	12,5	0,0	50,0	25,0	12,5	100

Tuy nhiên, em đó quên ghi kích thước mẫu n . Biết rằng n là số có 3 chữ số và chữ số tận cùng là 8. Tìm giá trị nhỏ nhất của n .

🗨️ **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

❖ **Bài 8.** Một cảnh sát giao thông ghi tốc độ (đơn vị: km/h) của 30 chiếc xe qua trạm như sau

53	47	59	66	36	69	83	77	42	57	51	60	78	63	46
63	42	55	63	48	75	60	58	80	44	59	60	75	49	63

Hãy lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp gồm 6 lớp với độ dài mỗi đoạn của lớp là 7.

🗨️ **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP TỔNG HỢP

❖ **Bài 1.** Điều tra thời gian hoàn thành một sản phẩm của 20 công nhân, người ta thu được mẫu số liệu sau (thời gian tính bằng phút).

10	12	13	15	11	13	16	18	19	21
23	21	15	17	16	15	20	13	16	11

Kích thước mẫu là bao nhiêu?

🗨️ **Lời giải.**

.....

❖ **Bài 2.** Điểm kiểm tra học kì môn Toán của các học sinh lớp 10A cho ở bảng dưới đây.

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10
Tần số	1	2	5	8	6	10	7	2

Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh?

 Lời giải.

◇◇ **Bài 3.** Dưới đây là bảng phân bố tần số - tần suất của đại lượng X . Trong bảng còn hai số chưa biết x và y . Tìm x và y .

Dấu hiệu	9	10	12	15	16
Tần số	1	2	3	x	4
Tần suất (%)	5	10	15	50	y

 Lời giải.

◇◇ **Bài 4.**

Cho bảng phân bố tần số ghép lớp của một mẫu số liệu mà các số liệu được sắp xếp từ nhỏ đến lớn như bên. Hãy tính tần suất (%) của lớp chứa số liệu thứ 5 của mẫu số liệu.

Lớp	Tần số
[0; 3]	3
[4; 7]	1
[7; 10]	2
[8; 11]	4

 Lời giải.

◇◇ **Bài 5.** Cho bảng số liệu về khối lượng của 30 củ khoai tây thu hoạch từ một thửa ruộng như dưới đây.

Lớp khối lượng (gam)	Tần số
[70; 80)	3
[80; 90)	6
[90; 100)	12
[100; 110)	6
[110; 120]	3
Cộng	30

Tần suất của lớp [100; 110) là bao nhiêu?

 Lời giải.

◇◇ **Bài 6.** Kết quả khảo sát ở 43 tỉnh (đơn vị: %) ghi lại số phần trăm những trẻ em mới sinh có trọng lượng dưới 2500 gam được cho ở bảng phân bố tần số ghép lớp bên dưới.

Lớp	[4, 5; 5, 4]	[5, 5; 6, 4]	[6, 5; 7, 4]	[7, 5; 8, 4]	[8, 5; 9, 4]	Cộng
Tần số	9	6	17	8	3	$n = 43$

Tính tỷ lệ phần trăm số tỉnh có số phần trăm những trẻ em mới sinh có trọng lượng dưới 2500 gam không

vượt quá 7,4% (làm tròn một chữ số thập phân).

Lời giải.

.....

Bài 7.

Người ta thống kê số phần trăm trẻ em mới sinh có trọng lượng dưới 2,5 kg của 43 tỉnh thành ở bảng phân bố tần suất ghép lớp sau. Có bao nhiêu tỉnh có tỉ lệ phần trăm trẻ có trọng lượng dưới 2,5 kg dưới 7,5% ?

Lớp	Tần suất (%)
[4,5; 5,5)	9
[5,5; 6,5)	6
[6,5; 7,5)	17
[7,5; 8,5)	8
[8,5; 9,5)	3

Lời giải.

.....

Bài 8. Một học sinh ghi lại bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp của một mẫu số liệu như sau

Lớp	[1; 9]	[10; 19]	[20; 29]	[30; 39]	[40; 49]	
Tần số						$n =$
Tần suất (%)	12,5	0,0	50,0	25,0	12,5	100

Tuy nhiên, em đó quên ghi kích thước mẫu n . Tìm giá trị nhỏ nhất của n .

Lời giải.

.....

BÀI 2. BIỂU ĐỒ

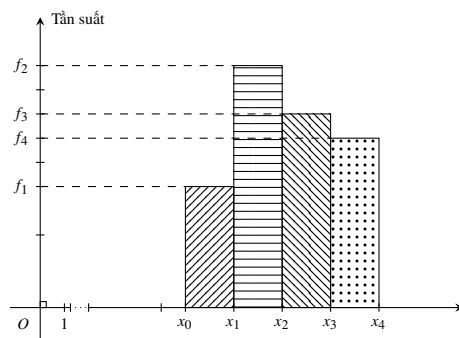
A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Biểu đồ tần suất hình cột

Cho bảng phân bố tần suất ghép lớp

Lớp x	$[x_0; x_1)$	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	$[x_3; x_4)$	Cộng
Tần suất (%)	f_1	f_2	f_3	f_4	100%

Ta có thể mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp qua biểu đồ tần suất hình cột như hình vẽ sau



! Tương tự, ta cũng có thể vẽ biểu đồ hình cột mô tả cho bảng phân bố tần suất, tần số và tần số ghép lớp.

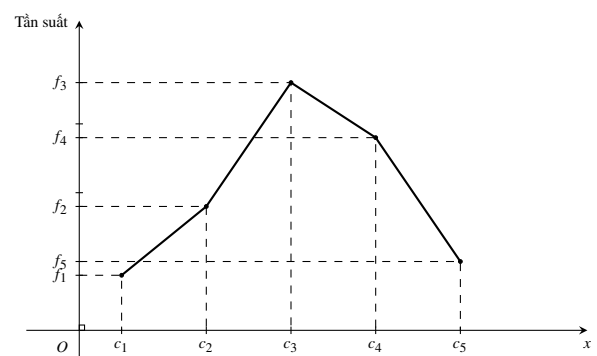
2. Đường gấp khúc tần suất

Cho bảng phân bố tần suất ghép lớp

Lớp x	$[x_0; x_1)$	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	$[x_3; x_4)$	$[x_4; x_5]$	Cộng
Tần suất (%)	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	100%

Ta cũng có thể mô tả bảng tần suất ghép lớp bằng một đường gấp khúc qua các bước sau:

- Trên mặt phẳng tọa độ ta xác định các điểm $(c_i; f_i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ trong đó c_i là trung bình cộng của hai đầu nút của lớp i (ta gọi c_i là giá trị đại diện của lớp i).
- Nối các điểm $(c_i; f_i)$ với $(c_{i+1}; f_{i+1})$, $i = 1, 2, 3, 4$, ta thu được đường gấp khúc, gọi là đường gấp khúc tần suất.



! Ta cũng có thể mô tả bảng tần suất, tần số và tần số ghép lớp bằng cách vẽ biểu đồ hình cột hoặc đường gấp khúc. Ở đó ta chỉ cần thay cột tần suất bằng cột tần số.

3. Biểu đồ hình quạt

Cho bảng phân bố tần suất ghép lớp

Lớp x	$[x_0; x_1)$	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	$[x_3; x_4)$	Cộng
Tần suất (%)	f_1	f_2	f_3	f_4	100%

Ta có thể mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp thông qua biểu đồ hình quạt như sau



Dotted lines for writing

Dạng 2. Biểu đồ đường gấp khúc

Ví dụ 4. Cho bảng tần suất ghép lớp:

Điểm thi học kì I môn Toán của 40 học sinh lớp 10D3 của trường THPT A

Lớp điểm thi	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10]	Cộng
Tần suất (%)	7,5	12,5	40	30	10	100%

- a) Hãy vẽ biểu đồ đường gấp khúc tần suất về điểm thi học kì I môn Toán của 40 học sinh lớp 10D3 của trường THPT A.
- b) Có bao nhiêu học sinh thuộc lớp điểm chiếm tỉ lệ cao nhất.
- c) Biết điểm giỏi là từ 8 đến 10. Hỏi lớp 10D3 có bao nhiêu học sinh đạt điểm giỏi.

Lời giải.

Dotted lines for writing the solution

🔗 **Bài 7.** Cho bảng tần suất ghép lớp:

Tốc độ (km/h) của 40 chiếc xe máy qua trạm kiểm soát giao thông B

Lớp tốc độ	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80]	Cộng
Tần suất (%)	25	15	40	20	100 %

Hãy vẽ biểu đồ đường gấp khúc tần suất về tốc độ (km/h) của 40 chiếc xe máy qua trạm kiểm soát giao thông B và nhận xét xem có bao nhiêu chiếc xe đi với tốc độ không dưới 70 km/h.

💬 **Lời giải.**

🔗 **Bài 8.** Cho bảng tần suất:

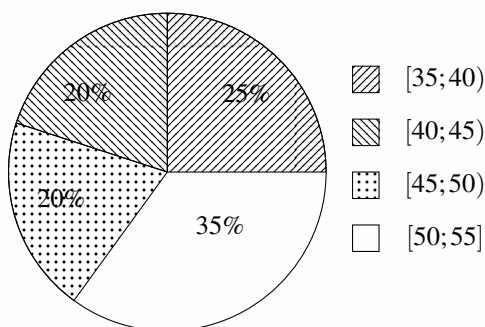
Tiền lương (nghìn đồng) hàng tháng của 50 công nhân ở xưởng may C

Tiền lương	700	800	900	1000	1100	1200	Cộng
Tần suất (%)	16	18	24	20	12	10	100 %

Hãy vẽ biểu đồ đường gấp khúc tần suất và đường gấp khúc tần số về tiền lương (nghìn đồng) hàng tháng của 50 công nhân ở xưởng may C.

💬 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 7.** Tiến hành một cuộc thăm dò về số cân nặng của một nhóm xã. Kết quả thu được biểu diễn qua biểu đồ tần suất hình quạt như sau:

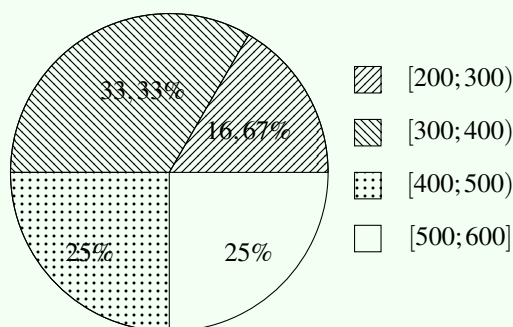


Hỏi số người trong xã có cân nặng từ 40 kg đến dưới 50 kg là bao nhiêu người, biết rằng xã có 1000 người.

💬 **Lời giải.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

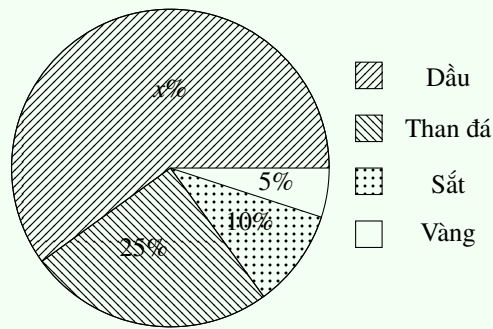
🔗 **Bài 9.** Số lượng khách đến tham quan tại Đà Nẵng trong 12 tháng được cho bởi biểu đồ như sau:



Tính số tháng mà số người tham quan không dưới 400 người.

💬 **Lời giải.**

🔗 **Bài 10.** Biểu đồ hình quạt sau mô tả tỉ lệ về giá trị đạt được của khoáng sản xuất khẩu nước ngoài của nước ta:



Biết rằng giá trị xuất khẩu của nước ta về dầu là 450 triệu USA. Hỏi giá trị xuất khẩu vàng là bao nhiêu triệu USA?

Lời giải.

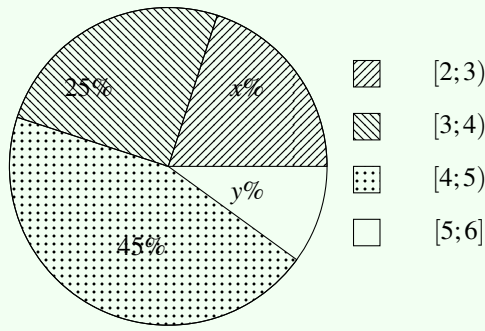
✧ **Bài 11.** Cho bảng phân bố tần số điểm thi môn Anh Văn của một trung tâm ở Hà Nội:

Điểm thi	6	7	8	9	Cộng
Tần số	40	60	80	20	200

Vẽ biểu đồ hình quạt mô tả bảng dữ liệu thống kê trên.

Lời giải.

✧ **Bài 12.** Tuổi thọ (tính theo tháng) của 100 bóng đèn thấp thử được thể hiện qua biểu đồ tần suất hình quạt:



Biết rằng x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 500$. Tìm số bóng đèn có tuổi thọ trong khoảng $[2;5)$ biết rằng $x > 15$.

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

BÀI 3. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG. SỐ TRUNG VỊ. MỐT

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Số trung bình cộng

↔ **Định nghĩa 3.1 (Số trung bình cộng).** Số trung bình cộng (số trung bình) của một dãy gồm n số liệu x_1, x_2, \dots, x_n kí hiệu là \bar{x} và được tính theo công thức: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

☑ Trường hợp bảng phân bố tần số và tần suất

Giá trị	x_1	x_2	\dots	x_m	Cộng
Tần số	n_1	n_2	\dots	n_m	N
Tần suất	f_1	f_2	\dots	f_m	100%

Số trung bình cộng được tính theo công thức:

$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k}{n} = f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_kx_k$ trong đó n_i, f_i lần lượt là tần số, tần suất của giá trị x_i ($i = 1, 2, \dots, k$) và n là số các số liệu thống kê ($n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$).

☑ Trường hợp bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp

Lớp	Giá trị đại diện	Tần số
$[a_1; a_2)$	x_1	n_1
$[a_2; a_3)$	x_2	n_2
\dots	\dots	\dots
$[a_{m-1}; a_m)$	x_m	n_m
		$N = \sum_{i=1}^m n_i$

Số trung bình cộng được tính theo công thức:

$\bar{x} = \frac{n_1c_1 + n_2c_2 + \dots + n_kc_k}{n} = f_1c_1 + f_2c_2 + \dots + f_kc_k$ trong đó n_i, c_i, f_i lần lượt là giá trị đại diện, tần số, tần suất của lớp thứ i ($i = 1, 2, \dots, k$) và n là số các số liệu thống kê ($n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$).

2. Số trung vị

↔ **Định nghĩa 3.2 (Số trung vị).** Sắp thứ tự các số liệu thống kê thành dãy không giảm (hoặc không tăng). Số trung vị (của các số liệu thống kê đã cho) kí hiệu M_e là số đứng giữa dãy nếu số phần tử là lẻ và là trung bình cộng của hai số đứng giữa dãy nếu số phần tử là chẵn.

⚠ Số trung vị được xác định như sau:

☑ $M_e = x_{\frac{n+1}{2}}$ nếu n là số lẻ.

☑ $M_e = \frac{1}{2} \left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n+1}{2}} \right)$ n là số chẵn.

3. Một

⇨ **Định nghĩa 3.3 (Một).** Một của một bảng phân bố tần số là giá trị có tần số lớn nhất và được kí hiệu là M_0 .

⚠ **Chú ý:**

- ✔ Số trung bình của mẫu số liệu được dùng làm đại diện cho các số liệu của mẫu.
- ✔ Nếu các số liệu trong mẫu có sự chênh lệch quá lớn thì dùng số trung vị làm đại diện cho các số liệu của mẫu.
- ✔ Nếu quan tâm đến giá trị có tần số lớn nhất thì dùng một làm đại diện. Một bảng phân bố tần số có thể có hai hay nhiều một.

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Số trung bình

Áp dụng công thức số trung bình cho bảng số tần số, tần suất và tần số, tần suất ghép lớp.

⇨ **Ví dụ 1.** Khối lượng 30 chi tiết máy được cho bởi bảng sau

Khối lượng(gam)	250	300	350	400	450	500	Cộng
Tần số	4	4	5	6	4	7	30

Tính số trung bình \bar{x} (làm tròn đến chữ số thứ hai sau dấu phẩy) của bảng nói trên.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

⇨ **Ví dụ 2.** Chiều cao của 20 cây giống được cho bởi bảng sau:

Lớp (cm)	Tần số
[40; 44]	2
[45; 49]	5
[50; 54]	3
[55; 59]	4
[60; 64]	3
[65; 69]	3
	$N = 20$

Tính số trung bình \bar{x} (làm tròn đến chữ số thứ hai sau dấu phẩy) của bảng nói trên.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

❖ **Bài 2.** Điều tra số học sinh giỏi khối 10 của 15 trường cấp ba trên địa bàn tỉnh A, ta được bảng số liệu như sau:

22	29	29	29	30	31	32	32	33	34	34	35	35	35	36
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Tính số trung vị của bảng nói trên.

🗨️ **Lời giải.**

❖ **Bài 3.** Tốc độ phát triển của một loại Vi-rút trong 10 ngày với các điều kiện khác nhau (đơn vị nghìn con) được thống kê như sau

20	100	30	980	440	20	20	150	60	270
----	-----	----	-----	-----	----	----	-----	----	-----

Trong trường hợp này ta chọn số nào dưới đây làm giá trị đại diện là tốt nhất? Tính giá trị đại diện đó.

🗨️ **Lời giải.**

❖ **Bài 4.** Một cửa hàng bán 3 loại hoa quả nhập khẩu: Bưởi, Dưa vàng và Lê với số liệu tính toán được cho bởi bảng (trong một quý) sau khi giảm giá mỗi loại lần lượt là x, y, z trên 1 kg

Loại quả	Lê	Dưa vàng	Bưởi
Giá bán (nghìn/1kg)	$200 - x$	$300 - y$	$400 - z$
Số lượng bán (kg)	$200 + x$	$300 + y$	$400 + z$

Biết rằng $x + y + z = 90$ (nghìn). Tính giá trị x, y, z để lợi nhuận bình quân của một 1 kg hoa quả đạt được cao nhất.

🗨️ **Lời giải.**

❖ **Bài 5.** Để đảm bảo bảng số liệu được phân bố đồng đều người ta điều chỉnh các giá trị x, y sao cho số trung bình cộng và số trung vị bằng nhau. Khi đó bảng số liệu được cho như sau:

Giá trị	40	50	60 + x	90 + y	
Tần số	20	30	60 – x	90 – y	200

Biết rằng $x \leq 0$. Tìm x ?

 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 3. Mốt

Áp dụng định nghĩa về Mốt của bảng số liệu thống kê.

⇨ **Ví dụ 5.** Tuổi thọ của 30 bóng đèn được thắp thử (đơn vị: giờ) được cho bởi bảng số liệu thống kê dưới đây

1180	1150	1190	1170	1180	1170	1160	1170	1160	1150
1190	1180	1170	1170	1170	1190	1170	1170	1170	1180
1170	1160	1160	1160	1170	1160	1180	1180	1150	1170

Hãy tính mốt của bảng số liệu thống kê trên.

 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Ví dụ 6.** Kết quả kiểm tra chất lượng đầu năm (thang điểm 30) của 41 học sinh của một lớp được cho bởi bảng số liệu thống kê dưới đây

Điểm	9	11	14	16	17	18	20	21	23	25	Tổng
Tần số	3	7	4	4	6	7	3	3	2	2	41

Hãy tính mốt của bảng số liệu thống kê trên.

 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....

❖ **Ví dụ 7.** Một bác sĩ mắt ghi lại tuổi của 30 bệnh nhân mắc bệnh đau mắt hột. Kết quả thu được mẫu số liệu như sau

21	17	22	18	20	17	15	13	15	20
15	12	18	17	25	17	21	15	12	18
16	23	14	18	19	13	16	19	18	17

Tính một M_O của bảng số liệu đã cho.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Ví dụ 8.** Điểm bài kiểm tra một tiết môn toán của 40 học sinh lớp 11A1 được thống kê bằng bảng số liệu dưới đây

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Số học sinh	2	3	$3n - 8$	$2n + 4$	3	2	4	5	40

Trong đó $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Tính một của bảng số liệu thống kê đã cho.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

❖ **Bài 6.** Cho bảng phân bố tần số sau

Giá trị	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Tần số	12	5	n^2	16	$6n - 5$

Tìm tất cả các số tự nhiên n để $M_O = x_3$ là một duy nhất của bảng phân bố tần số đã cho.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◀▶ **Bài 7.** Cho bảng phân bố tần số sau

Giá trị	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Tần số	5	2	n	$20 - n$	8

Tìm các số tự nhiên n để $M_O = x_4$ là một duy nhất của bảng số liệu thống kê đã cho.

💬 Lời giải.

◀▶ **Bài 8.** Cho bảng phân bố tần số sau

Giá trị	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
Tần số	5	$n^2 + 3$	3	$7n - 9$	$n + 1$	7

Gọi S là tập hợp tất cả các số n nguyên dương sao cho $M_O = x_2$ và $M_O = x_4$ là hai mốt của bảng phân bố tần số đã cho. Tính số phần tử của tập hợp S .

💬 Lời giải.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

◀▶ **Bài 9.** Quan sát 9 con chuột chạy qua một mê hồn trận và ghi lại thời gian (tính bằng phút) của chúng trong bảng sau:

Con chuột	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Thời gian chạy	1	2,5	3	1,5	2	1,25	1	0,9	30

- Tính số trung bình, số trung vị và mốt của thời gian chuột ra khỏi mê hồn trận?
- Trong trường hợp này nên chọn đại lượng nào để thể hiện xu thế trung bình của mẫu?

💬 Lời giải.

BÀI 4. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Để đo độ phân tán (độ chênh lệch) giữa các giá trị của mẫu số liệu so với số trung bình, người ta đưa ra hai số đặc trưng là *phương sai* và *độ lệch chuẩn*.

↔ **Định nghĩa 4.1.** Giả sử ta có một mẫu số liệu kích thước n là x_1, x_2, \dots, x_n .

Phương sai của mẫu số liệu này, kí hiệu là s_x^2 , được tính bởi công thức sau

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

trong đó \bar{x} là số trung bình của mẫu số liệu.

Căn bậc hai của phương sai được gọi là *độ lệch chuẩn*, kí hiệu là s_x .

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

⚠ Chú ý

- Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì độ phân tán của các số liệu thống kê càng lớn.*
- Phương sai s_x^2 và độ lệch chuẩn s_x đều được dùng để đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê (so với số trung bình cộng). Nhưng khi cần chú ý đến đơn vị đo thì ta dùng s_x vì s_x có cùng đơn vị đo với dấu hiệu được nghiên cứu.*
- Phương sai còn được tính theo các công thức sau đây*
 - Trường hợp bảng phân bố tần số, tần suất:*

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2$$

trong đó n_i, f_i lần lượt là tần số, tần suất của giá trị x_i .

- Trường hợp bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp:*

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (c_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k f_i (c_i - \bar{x})^2$$

trong đó c_i, n_i, f_i lần lượt là giá trị đại diện, tần số, tần suất của giá trị x_i .

- Người ta còn chứng minh được công thức sau:*

$$s_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng số liệu KHÔNG ghép lớp

a) Để tính phương sai s^2 của một mẫu số liệu $\{x_1; x_2; \dots; x_N\}$ ta thực hiện một trong các cách sau:

☉ Cách 1:

+ Tính số trung bình: $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$;

+ Tính các độ lệch: $x_i - \bar{x}$, ($i = \overline{1, N}$);

+ Tính các phương sai theo công thức: $s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$.

☉ Cách 2:

+ Tính $\sum_{i=1}^N x_i$ và $\sum_{i=1}^N x_i^2$;

+ Tính phương sai theo công thức: $s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2$.

Chú ý: Nếu bảng số liệu được cho bởi bảng phân phối tần số như sau:

X	x_1	x_2	...	x_m	
Tần số	n_1	n_2	...	n_m	N

Thì phương sai được tính theo công thức: $s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i (x_i - \bar{x})^2$.

b) Tính độ lệch chuẩn s : Độ lệch chuẩn s bằng căn bậc hai của phương sai:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}.$$

🔗 Ví dụ 1. Sản lượng lúa (đơn vị là tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng tần số dưới đây:

Sản lượng (x)	20	21	22	23	24	
Tần số (n)	5	8	11	10	6	$N = 40$

a) Tính sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng?

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

💬 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

❖ **Bài 1.** Kết quả thi kết thúc học kì một của bạn Hoa được ghi lại trong bảng sau:

Văn	Địa	Lý	Hóa	Toán	Anh văn
6,0	8,0	7,5	8,5	7,0	7,5

Tìm số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 2.** Theo dõi số áo bán ra của 9 loại áo tại một cửa hàng, người ta có dãy số liệu sau (đơn vị: chiếc)

42	52	23	36	48	42	40	48	42
----	----	----	----	----	----	----	----	----

Tìm số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 3.** Trong sổ theo dõi bán hàng ở một cửa hàng bán xe máy có bảng sau:

Số xe bán trong ngày	0	1	2	3	4	5
Tần số	2	13	15	12	7	3

Tìm số xe trung bình bán được trong ngày. Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 4.** Bảng số liệu sau cho ta lãi (quy tròn) hàng tháng của một cửa hàng A trong năm 2006 (đơn vị là triệu đồng).

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lãi	12	15	18	13	18	16	17	14	18	17	20	17

Tìm số trung bình. Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 5.** Theo dõi số bao xi măng bán ra trong 22 ngày tại một cửa hàng bán vật liệu xây dựng ta có bảng sau:

47	54	43	50	61	36	65	54	43	50	62
59	36	45	45	33	53	67	21	45	50	36

Tìm số trung bình. Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

 **Lời giải.**

◇◇ **Bài 6.** Bảng sau đây ghi lại tốc độ (km/h) của 30 chiếc ô tô.

60	65	70	68	62	75	80	83	82	69
73	75	85	72	67	88	90	85	72	63
75	76	85	84	70	61	60	65	73	76

Tìm số trung bình. Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

 **Lời giải.**

◇◇ **Bài 7.** Số liệu sau đây cho ta số lãi mỗi tháng của một cửa hàng năm 2004 (đơn vị: triệu đồng).

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lãi	12	15	18	13	13	16	18	19	15	17	20	17

Tìm số trung bình. Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.


 **Lời giải.**

Dạng 2. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng số liệu ghép lớp

Để tính phương sai của bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp ta dùng công thức

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \left[n_1(c_1 - \bar{x})^2 + n_2(c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(c_k - \bar{x})^2 \right]$$

trong đó c_i, n_i, f_i lần lượt là giá trị đại diện, tần số, tần suất của lớp thứ i ; c_i được tính bằng trung bình cộng của 2 giá trị đầu mút của lớp i , n là số các số liệu thống kê ($n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$), \bar{x} là số trung bình cộng của các số trong số liệu thống kê đã cho.

 Người ta còn chứng minh được công thức $s_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$.

Độ lệch chuẩn s_x được tính bởi công thức $s_x = \sqrt{s_x^2}$.

Ví dụ sau sử dụng công thức $s_x^2 = \frac{1}{n} \left[n_1(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(x_k - \bar{x})^2 \right]$ để tính phương sai.

◇◇ **Ví dụ 4.** Cho bảng phân bố tần số ghép lớp sau


Độ dài của 60 lá dương xỉ trưởng thành

Lớp của độ dài (cm)	Tần số
[10; 20)	8
[20; 30)	18
[30; 40)	24
[40; 50]	10
Cộng	60

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng phân bố tần số ghép lớp đã cho.

 **Lời giải.**

Ví dụ sau sử dụng công thức $s_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$ để tính phương sai.

 **Ví dụ 5.** Cho bảng phân bố tần số ghép lớp sau

Khối lượng của 30 củ khoai tây

Lớp của khối lượng (g)	Tần số
[70; 80)	3
[80; 90)	6
[90; 100)	12
[100; 110)	6
[110; 120)	3
Cộng	30

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng phân bố tần số ghép lớp đã cho.

 **Lời giải.**

Ví dụ sau cho bảng phân bố tần suất ghép lớp. Ta tính \bar{x} và s_x^2 dựa trên tần suất.

 **Ví dụ 6.** Cho bảng phân bố tần suất ghép lớp sau

Chiều cao của 35 cây bạch đàn

Lớp của chiều cao (m)	Tần suất (%)
[6,5; 7,0)	5,7
[7,0; 7,5)	11,4
[7,5; 8,0)	25,7
[8,0; 8,5)	31,4
[8,5; 9,0)	17,2
[9,0; 9,5]	8,6
Cộng	100

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng phân bố tần suất ghép lớp đã cho.

 **Lời giải.**

Lớp số đo chiều cao (cm)	Tần số
[150; 156)	6
[156; 162)	12
[162; 168)	13
[168; 174]	5
Cộng	36

 Lời giải.

⇨ **Bài 10.** Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng phân bố sau

Tiền lãi của mỗi ngày bán báo được khảo sát trong 30 ngày

Lớp tiền lãi (nghìn đồng)	Tần số
[29,5; 40,5)	3
[40,5; 51,5)	4
[51,5; 62,5)	9
[62,5; 73,5)	5
[73,5; 84,5)	5
[84,5; 95,5]	4
Cộng	30

 Lời giải.

⇨ **Bài 11.** Trong một trường THPT, cho kiểm tra toán ở 2 lớp 10A và 10B và lập được bảng tần số ghép lớp như sau:

Điểm thi toán của lớp 10A

Lớp điểm kiểm tra	Tần số
[0; 2)	2
[2; 4)	4
[4; 6)	12
[6; 8)	28
[8; 10]	4
Cộng	50

Điểm thi toán của lớp 10B

Lớp điểm kiểm tra	Tần số
[0; 2)	4
[2; 4)	10
[4; 6)	18
[6; 8)	14
[8; 10]	5
Cộng	50

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của hai bảng phân bố tần số ghép lớp trên và cho kết luận.

 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

↔ **Bài 12.** Một nông dân nuôi cá có 2 ao nuôi cùng một loại cá. Ông ta bắt mỗi ao 24 con cá và cân. Sau đây là bảng phân bố khối lượng 2 nhóm cá.

<i>Nhóm cá thứ nhất</i>	
Lớp khối lượng (g)	Tần số
[630; 635)	1
[635; 640)	2
[640; 645)	3
[645; 650)	6
[650; 655]	12
Cộng	

<i>Nhóm cá thứ hai</i>	
Lớp khối lượng (g)	Tần số
[630; 635)	0
[635; 640)	0
[640; 645)	8
[645; 650)	7
[650; 655]	9
Cộng	

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của hai bảng phân bố tần số ghép lớp trên và cho kết luận.

 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....

BÀI TẬP TỔNG HỢP

↔ **Bài 13.** Một trang trại trồng hai loại táo A và B. Chủ trang trại phải lựa chọn một loại táo có trọng lượng các quả táo ít bị phân tán để xuất khẩu. Sau vụ thu hoạch, ông đã cân trọng lượng của 100 quả táo. Các số liệu được tóm tắt trong bảng tần số sau:
Trọng lượng các quả táo loại A

Trọng lượng	Tần số
[80; 120)	9
[120; 160)	13
[160; 200)	5
[200; 240)	15
[240; 280)	8
Tổng	50

Trọng lượng các quả táo loại B

Trọng lượng	Tần số
[80; 120)	8
[120; 160)	11
[160; 200)	12
[200; 240)	11
[240; 280)	8
Tổng	50

Em hãy cho biết chủ trang trại sẽ chọn loại táo nào để xuất khẩu?

 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

❖ Bài 14. Trên hai con đường A và B, trạm kiểm soát đã ghi lại tốc độ (km/h) của 30 chiếc ô tô trên mỗi con đường như sau:

Con đường A:

60	65	70	68	62	75	80	83	82	69	73	75	85	72	67
88	90	85	72	63	75	76	85	84	70	61	60	65	73	76

Con đường B:

76	64	58	82	72	70	68	75	63	67	74	70	79	74	60
80	73	75	71	68	72	73	79	80	63	62	71	70	69	63

- Tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của tốc độ ô tô trên mỗi con đường A, B.
- Theo em thì chạy xe trên con đường nào an toàn hơn?

 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



C – ĐỀ SỐ 2A

❖ **Bài 1.** Điểm kiểm tra môn Toán cuối học kỳ 1 của một nhóm 16 học sinh là:

8, 9, 7, 0, 2, 7, 9, 10, 4, 5, 7, 8, 8, 9, 10, 7.

Tìm mốt và số trung vị của các số liệu thống kê đã cho.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 2.** Tiền thưởng của 35 nhân viên trong một công ti được thống kê trong bảng tần số ghép lớp sau đây (đơn vị: triệu đồng)

Lớp	[20; 24]	[25; 29]	[30; 34]	[35; 39]	[40; 44]	Cộng
Tần số	2	7	15	8	3	$n = 35$

Tính số trung bình và độ lệch chuẩn (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

 **Lời giải.**

❖ **Bài 3.** Điều tra về chiều cao của học sinh (đơn vị: cm) trong trường THPT, người ta thu được bảng số liệu thống kê sau:

3mm= 4mm	160	163	166	162	164	167	165	169	163	167	171	168
	165	161	170	171	164	172	162	167	173	169	164	166
	164	166	165	167	161	168	164	174	165	168	163	161

a) Lập bảng phân bố tần số ghép lớp, sử dụng các lớp sau:

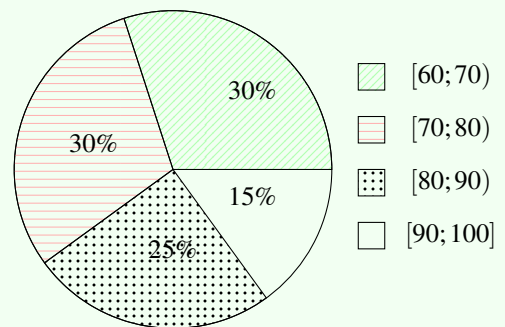
[160; 163), [163; 166), [166; 169), [169; 172), [172; 175).

b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

Lời giải.

🔗 Bài 4.

Biểu đồ tần suất hình quạt bên mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp của dữ liệu điểm thi của 20 học sinh trong kì thi Tiếng Anh (thang điểm 100). Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp của dữ liệu đó.



Lời giải.

🔗 **Bài 5.** Điểm kiểm tra môn Toán của 35 học sinh lớp 10A được thống kê trong bảng phân bố tần số sau đây (thang điểm 10):

Điểm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	2	1	2	1	2	3	x	5	y	4	3	$n = 35$

Biết rằng mẫu số liệu trên có 2 môđ. Hãy tìm x và y .

 Lời giải.

.....

.....

D – ĐỀ SỐ 2B

⇨ **Bài 1.** Điểm kiểm tra môn Toán cuối học kỳ 1 của một nhóm 17 học sinh là:

8, 9, 7, 0, 2, 7, 9, 10, 4, 5, 7, 8, 8, 9, 10, 8, 3.

Tìm môđ và số trung vị của các số liệu thống kê đã cho.

 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

⇨ **Bài 2.** Tiền thưởng của 35 nhân viên trong một công ti được thống kê trong bảng tần số ghép lớp sau đây (đơn vị: triệu đồng)

Lớp	[20; 24]	[25; 29]	[30; 34]	[35; 39]	[40; 44]	Cộng
Tần số	2	7	15	8	3	$n = 35$

Tính số trung bình và độ lệch chuẩn (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

◀▶ **Bài 3.** Điều tra về cân nặng của cá (đơn vị: kg) trong ao nuôi, người ta thu được bảng số liệu thống kê sau:

3mm= 4mm	3,5	8,5	6,5	5,5	4,5	5,6	9,5	5,9	7,5	3,8
	6,8	4,2	7,3	5,7	8,0	5,9	3,6	7,8	6,4	7,9
	7,1	6,0	7,6	4,0	6,1	6,7	6,3	6,9	6,2	7,7
	6,1	3,8	6,2	6,6	6,3	6,4	7,5	3,9	7,5	6,0
	9,0	6,0	7,5	3,6	6,1	6,0	5,4	6,4	9,2	4,7

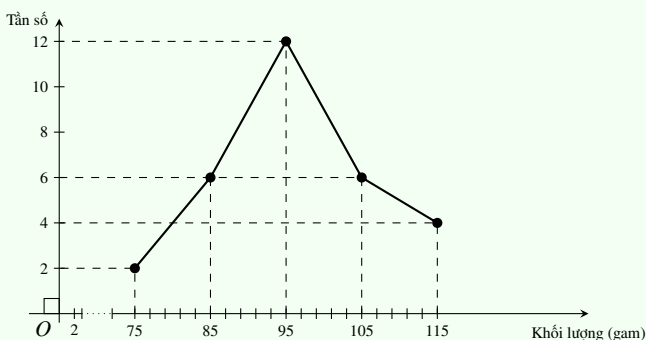
a) Lập bảng phân bố tần số ghép lớp, sử dụng các lớp sau: $[3,5; 5,0)$, $[5,0; 6,5)$, $[6,5; 8,0)$, $[8,0; 10]$.

b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

🗨️ Lời giải.

◀▶ Bài 4.

Cho biểu đồ đường gấp khúc tần số hình bên mô tả khối lượng của 30 củ khoai tây sau khi thu hoạch (đơn vị: gam). Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp của dữ liệu đó, sử dụng các lớp sau: $[70; 80)$, $[80; 90)$, $[90; 100)$, $[100; 110)$, $[110; 120]$.



 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

⇨ **Bài 5.** Điểm kiểm tra môn Toán của 40 học sinh lớp 10B được thống kê trong bảng phân bố tần số sau đây (thang điểm 10):

Điểm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	2	1	2	1	2	x	5	7	y	5	4	$n = 40$

Biết rằng mẫu số liệu trên có 2 mode. Hãy tìm x và y .

 Lời giải.

.....

.....

E – ĐỀ SỐ 3A

⇨ **Bài 1. (2,0 điểm)** Cho bảng phân bố tần số ghép lớp:

Lớp các giá trị x	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14]	Cộng
Tần số n_i	15	30	55	100

Hãy tìm số trung bình của các giá trị trong bảng trên.

 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

⇨ **Bài 2. (2,0 điểm)** Độ dài của 60 lá dương xỉ trưởng thành được cho bằng bảng phân bố tần số ghép lớp như sau.

Số TT	Lớp của độ dài (cm)	Tần số
1	[10; 20)	18
2	[20; 30)	8
3	[30; 40)	10
4	[40; 50)	24
	Cộng	60

Hãy tính phương sai của bảng số liệu thống kê trên.

 Lời giải.

❖ **Bài 3. (2,0 điểm)** Cho bảng phân bố tần số sau

Giá trị	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Tần số	5	10	n^2	16	$6n - 5$

Tìm tất cả các giá trị n để x_3 là một duy nhất của bảng phân bố tần số đã cho.

🗨️ **Lời giải.**

.....

.....

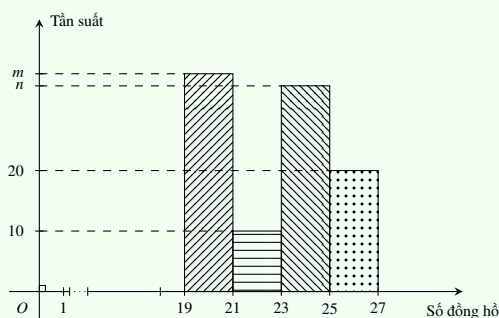
.....

.....

.....

.....

❖ **Bài 4. (2,0 điểm)** Cho biểu đồ tần suất hình cột về số đồng hồ được bán ra của một cửa hàng ở tỉnh X trong 30 ngày như hình vẽ



Tìm giá trị của m và n biết $m^2 - 15m - 250 = 0$.

🗨️ **Lời giải.**

.....

.....

❖ **Bài 5. (2,0 điểm)** Sau một kì thi học sinh giỏi Toán, người ta thống kê kết quả (thang điểm 20) và thu được bảng tần số sau.

Lớp điểm	[6; 10]	[11; 15]	[16; 20]	Cộng
Tần số	22	12	6	40

Nếu những học sinh chỉ cần đạt điểm trung bình của bảng điểm trên đều được nhận Giấy Khen của ban tổ chức, thì số học sinh được nhận Giấy Khen là bao nhiêu?

🗨️ **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....



CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

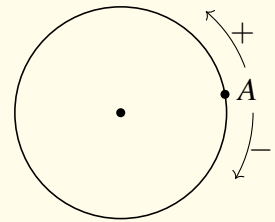
BÀI 1. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm cung và góc lượng giác

⇔ Định nghĩa 1.1.

Đường tròn định hướng là một đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương, chiều ngược lại gọi là chiều âm.
Quy ước: chiều dương là chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ.



⇔ Định nghĩa 1.2. Trên đường tròn định hướng, cho hai điểm A và B . Một điểm M di chuyển trên đường tròn luôn theo một chiều (dương hoặc âm) từ A đến B tạo nên một *cung lượng giác* có điểm đầu là A , điểm cuối là B .

⚠ Với hai điểm A, B đã cho trên đường tròn định hướng, ta có vô số cung lượng giác điểm đầu A , điểm cuối B . Mỗi cung như vậy đều được kí hiệu là \widehat{AB} .

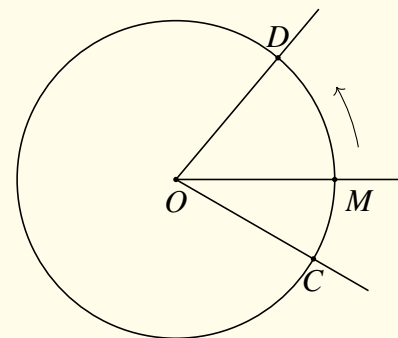
⚠ Trên một đường tròn định hướng, lấy hai điểm A và B thì

- ✔ Kí hiệu \widehat{AB} chỉ một cung hình học (cung lớn hoặc cung bé) hoàn toàn xác định.
- ✔ Kí hiệu \widehat{AB} chỉ một cung lượng giác điểm đầu A , điểm cuối B .

⇔ Định nghĩa 1.3.

Trên đường tròn định hướng, cho cung lượng giác \widehat{CD} . Một điểm M chuyển động trên đường tròn từ C đến D tạo nên cung lượng giác \widehat{CD} nói trên.

Khi đó, tia OM quay xung quanh gốc O từ vị trí OC đến vị trí OD . Ta nói tia OM tạo ra một *góc lượng giác* có tia đầu là OC , tia cuối là OD . Kí hiệu: (OC, OD) .

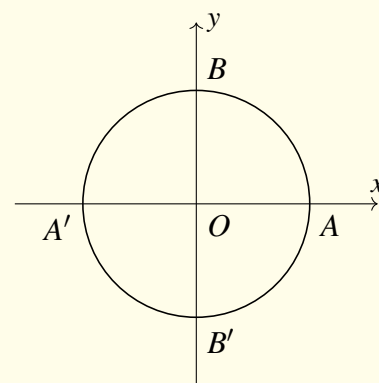


⇔ Định nghĩa 1.4.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường tròn định hướng tâm O bán kính $R = 1$.

Đường tròn này cắt hai trục tọa độ tại bốn điểm $A(1; 0)$, $A'(-1; 0)$, $B(0; 1)$, $B'(0; -1)$. Ta lấy A làm điểm gốc của đường tròn đó.

Đường tròn xác định như trên gọi là *đường tròn lượng giác (gốc A)*.



2. Số đo của cung và góc lượng giác

⇨ **Định nghĩa 1.5.** Trên đường tròn tùy ý, cung có độ dài bằng bán kính được gọi là *cung co số đo 1 rad*.

Liên hệ giữa độ và rad: $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$ và $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

⚠ **Khi viết số đo của một góc (hay cung) theo đơn vị radian, người ta thường không viết chữ rad sau số đo. Chẳng hạn cung $\frac{\pi}{2}$ được hiểu là cung $\frac{\pi}{2}$ rad.**

Bảng chuyển đổi thông dụng:

Độ	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

⇨ **Định nghĩa 1.6.** Số đo của một cung lượng giác \widehat{AM} ($A \neq M$) là một số thực, âm hay dương.

Kí hiệu số đo của cung là \widehat{AM} là số \widehat{AM} .

Ghi nhớ:

$$\text{sđ } \widehat{AM} = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{sđ } \widehat{AM} = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

⇨ **Định nghĩa 1.7.** Số đo của góc lượng giác (OA, OC) là số đo của cung lượng giác \widehat{AC} tương ứng.

Số đo của một cung lượng giác

Số đo của một cung lượng giác \widehat{AM} ($A \neq M$) là một số thực, âm hay dương. Kí hiệu số đo của cung là \widehat{AM} là số \widehat{AM} .

Ghi nhớ

$$\text{sđ } \widehat{AM} = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

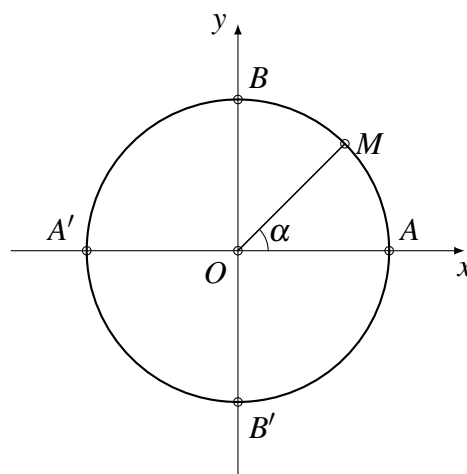
$$\text{sđ } \widehat{AM} = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

Số đo của một góc lượng giác

Số đo của góc lượng giác (OA, OC) là số đo của cung lượng giác \widehat{AC} tương ứng.

Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác

Điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho góc lượng giác $(OA, OM) = \alpha$ là điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo α .



B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Liên hệ giữa độ và radian

Sử dụng công thức chuyển đổi giữa số đo độ và số đo radian: $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$ và $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

◊ Ví dụ 1. Đổi số đo của các góc sau ra radian: 72° ; 600° ; $-37^\circ 45' 30''$.

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ Ví dụ 2. Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{5\pi}{18}$; $\frac{3\pi}{5}$; -4 .

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

◊ Bài 1. Đổi số đo của các góc sau ra radian: 54° ; $30^\circ 45'$; -60° ; -210° .

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Bài 2.** Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{\pi}{5}$; $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{4\pi}{3}$; $3,56\pi$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

📁 Dạng 2. Độ dài cung lượng giác

Cung tròn bán kính R có số đo α ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), có số đo a° ($0 \leq a \leq 360$) và có độ dài là l thì:

$$l = R\alpha = \frac{\pi a}{180} \cdot R \text{ do đó } \frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180}$$

Đặc biệt: $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$, $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$.

❖ **Ví dụ 3.** Một đường tròn có bán kính 36 m. Tìm độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo là
 a) $\frac{3\pi}{4}$ b) 51° c) $\frac{1}{3}$

💬 **Lời giải.**

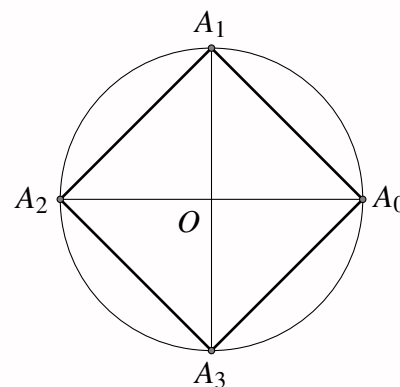
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Ví dụ 4.** Một hải lí là độ dài cung tròn xích đạo có số đo $\left(\frac{1}{60}\right)^\circ = 1'$. Biết độ dài xích đạo là 40.000 km, hỏi một hải lí dài bao nhiêu km?

💬 **Lời giải.**

❖ Ví dụ 5.

Cho hình vuông A_0, A_1, A_2, A_3 nội tiếp đường tròn tâm O (các đỉnh được sắp xếp theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo của các cung lượng giác $\widehat{A_0A_i}, \widehat{A_iA_j}$ ($i, j = 0, 1, 2, 3, i \neq j$).



💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

❖ **Bài 3.** Tính độ dài cung tròn trong các trường hợp sau:

a) Bán kính $R = 5$, có số đo 72° .

b) Bán kính $R = 18$, có số đo 150° .

💬 Lời giải.

.....
.....
.....

❖ **Bài 4.** Cho đường tròn có đường kính $R = 20$ cm. Hãy tính độ dài cung tròn có số đo: $\frac{\pi}{15}; 1,5; 37^\circ$

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

✎ **Bài 5.** Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.

a) Tính góc (theo độ và radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.

b) Tính quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính bánh xe đạp là 680 mm.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....

✎ **Bài 6.** Cho lục giác đều $A_0A_1A_2A_4A_5A_6$ nội tiếp đường tròn tâm O (các đỉnh được sắp xếp theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo của các cung lượng giác $\widehat{A_0A_i}$, $\widehat{A_iA_j}$ ($i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, i \neq j$).

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....

✎ **Bài 7.** Trên đường tròn lượng giác gốc A . Cho điểm M, N sao cho $sđ\widehat{AM} = \frac{\pi}{5}$, $sđ\widehat{AN} = -\frac{\pi}{5}$. Các điểm M', N' lần lượt là các điểm đối xứng của M, N qua tâm đường tròn. Tìm số đo của cung $\widehat{AM'}$, $\widehat{AN'}$ và $\widehat{M'N'}$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

📁 Dạng 3. Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác

Để biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác, ta thường sử dụng các kết quả sau:

- ☑ Cung có số đo α (a°) và cung có số đo $\alpha + k2\pi$ ($a^\circ + k360^\circ$) có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.
- ☑ Số điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung lượng giác có số đo dạng $\alpha + \frac{k2\pi}{m}$ (hay $a^\circ + \frac{k360^\circ}{m}$) (với k là số nguyên và m là số nguyên dương) là m điểm. Từ đó để biểu diễn các cung lượng giác đó, ta cho k chạy từ 0 đến $m - 1$ rồi biểu diễn các cung đó.

.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Ví dụ 10.** Cho cung lượng giác có số đo $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{4}$ với k là số nguyên tùy ý. Có bao nhiêu giá trị của k thỏa mãn $x \in \left(-\frac{3\pi}{5}; 4\pi\right]$?

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Ví dụ 11.** Cho cung lượng giác có số đo $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6}$ với số k tùy ý. Có bao nhiêu giá trị của k thỏa mãn $x \in \left(-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]$?

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Ví dụ 12.** Biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = \frac{k\pi}{2}$ với k là số nguyên tùy ý.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

.....
.....
.....

◇◇ **Bài 14.** Khi biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = k\pi$ và $y = k2\pi$ lên đường tròn lượng giác, số điểm chung nhận được là bao nhiêu?

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◇◇ **Bài 15.** Khi biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $y = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ lên đường tròn lượng giác, số điểm chung nhận được là bao nhiêu?

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◇◇ **Bài 16.** Khi biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$ và $y = \frac{5\pi}{6} + k\pi$ lên đường tròn lượng giác, số điểm chung nhận được là bao nhiêu?

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....

✧ **Bài 20.** Coi kim giờ đồng hồ là tia Ou , kim phút đồng hồ là tia Ov . Hãy tìm số đo của góc lượng giác $(Ou; Ov)$ khi đồng hồ chỉ 3 giờ, 4 giờ, 9 giờ, 11 giờ.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

✧ **Bài 21.** Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo α . Tìm số đo góc hình học \widehat{uOv} trong các trường hợp sau:

a) $\alpha = -1955^\circ$

b) $\alpha = \frac{1088\pi}{3}$

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

✧ **Bài 22.** Cho đường tròn đường kính 20 cm. Tìm số đo bằng độ và rad các cung có độ dài lần lượt là 9 cm, 37 cm.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

✧ **Bài 23.** Trên đường tròn lượng giác cho các cung có số đo theo thứ tự là $-60^\circ, -315^\circ, -1130^\circ$,

✧ **Bài 26.** Hiện tại đồng hồ chỉ 8 giờ đúng. Nếu đồng hồ chạy bình thường thì sau bao nhiêu lần đầu tiên kim giờ OG và kim phút OP tạo thành góc lượng giác $(OG; OP) = 180^\circ$?

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....

✧ **Bài 27.** Kim giờ và kim phút của một đồng hồ lớn có độ dài lần lượt là 165 cm và 225 cm. Hỏi trong 40 phút đầu kim giờ vạch cung tròn có độ dài bao nhiêu mét, đầu kim phút vạch cung tròn có độ dài bao nhiêu mét ?

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

✧ **Bài 28.** Một bánh xe có bán kính $R = 2,4$ m quay một góc bằng 30° . Tính độ dài đường đi của một điểm trên vành bánh xe.

🗨️ Lời giải.

.....
.....

BÀI 2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

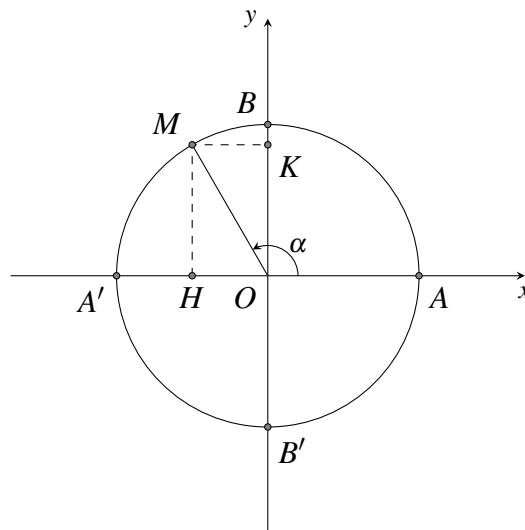
A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- ☑ $\sin \alpha = \overline{OK}$.
- ☑ $\cos \alpha = \overline{OH}$.
- ☑ $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ nếu $\cos \alpha \neq 0$.
- ☑ $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ nếu $\sin \alpha \neq 0$.

Các giá trị $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của cung α .

Ta cũng gọi trục tung là **trục sin**, còn trục hoành là **trục cosin**.



⚠ Chú ý

- ☑ Các định nghĩa trên cũng áp dụng cho các góc lượng giác.
- ☑ Nếu $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ thì các giá trị lượng giác của góc α chính là các giá trị lượng giác của góc đó đã nêu trong SGK Hình học 10.

2. Hệ quả

a) $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, hơn nữa

- ☑ $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha, \forall k \in \mathbb{Z}$.
- ☑ $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha, \forall k \in \mathbb{Z}$.

b) $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ và $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.

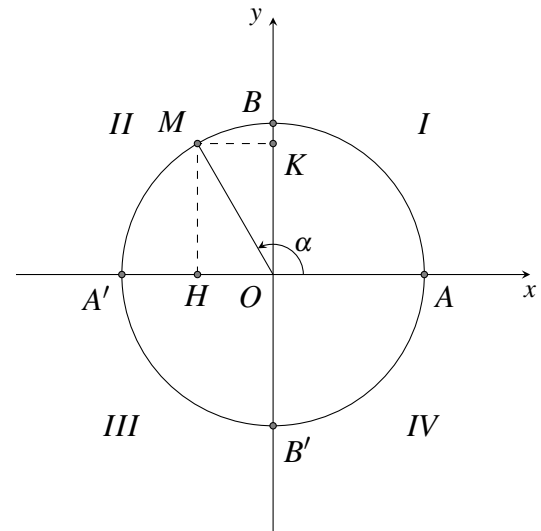
c) Với mọi $m \in \mathbb{R}$ mà $-1 \leq m \leq 1$ đều tồn tại α, β sao cho $\sin \alpha = m$ và $\cos \beta = m$.

d) $\tan \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

e) $\cot \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

f) Dấu của các giá trị lượng giác phụ thuộc vào vị trí điểm cuối của cung $\widehat{AM} = \alpha$ trên đường tròn lượng giác.

Giá trị lượng giác	Góc phần tư			
	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-



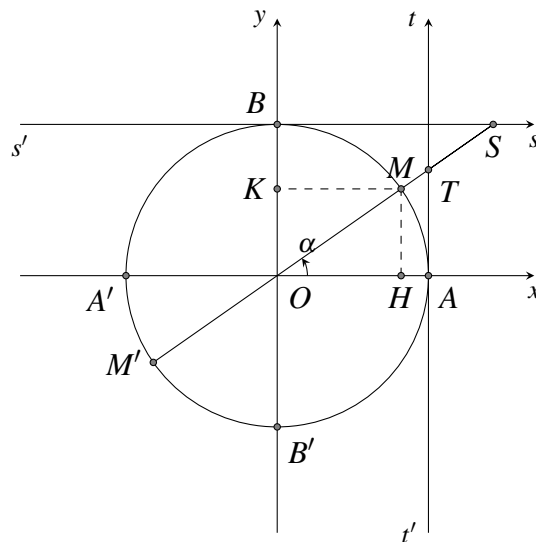
3. Ý nghĩa hình học của tang và cotang

☑ $\tan \alpha$ được biểu diễn bởi độ dài đại số của vectơ \vec{AT} trên trục $t'At$. Trục $t'At$ được gọi là **trục tang**.

Do đó $\tan \alpha = \overline{AT}$.

☑ $\cot \alpha$ được biểu diễn bởi độ dài đại số của vectơ \vec{BS} trên trục $s'Bs$. Trục $s'Bs$ được gọi là **trục cotang**.

Do đó $\cot \alpha = \overline{BS}$.



4. Công thức lượng giác cơ bản

☑ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$

☑ $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

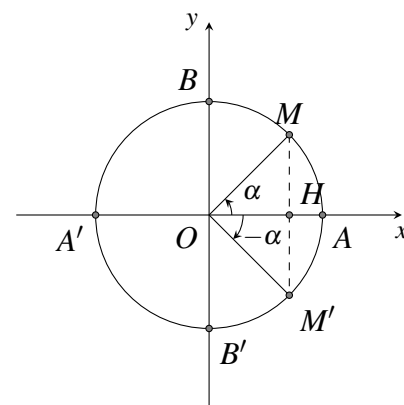
☑ $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

☑ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

5. Giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt

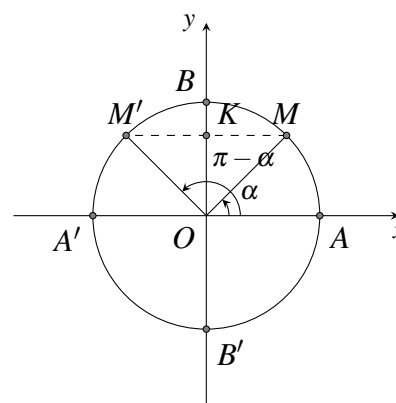
a) Cung đối nhau.

- ☑ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha.$
- ☑ $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$
- ☑ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha.$
- ☑ $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha.$



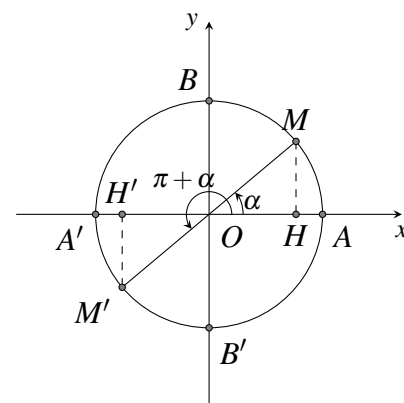
b) Cung bù nhau.

- ☑ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha.$
- ☑ $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha.$
- ☑ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha.$
- ☑ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha.$



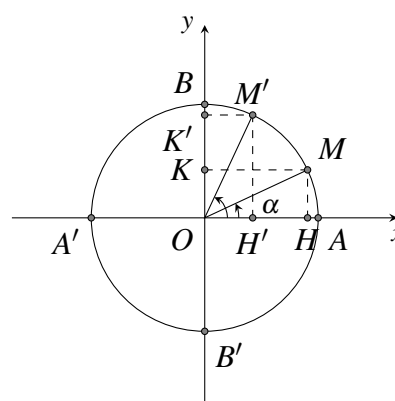
c) Cung hơn kém π .

- ☑ $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha.$
- ☑ $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha.$
- ☑ $\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha.$
- ☑ $\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha.$



d) Cung phụ nhau.

- ☑ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha.$
- ☑ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha.$
- ☑ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha.$
- ☑ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha.$

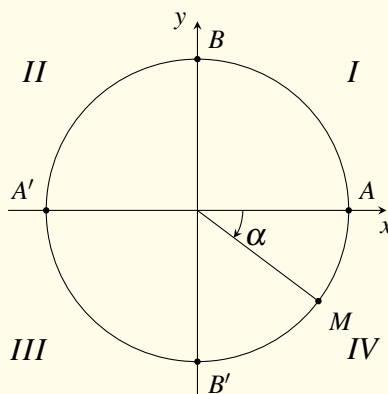


B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Dấu của các giá trị lượng giác

Để xác định dấu của các giá trị lượng giác của một góc α ta xác định vị trí điểm cuối của cung $\widehat{AM} = \alpha$ trên đường tròn lượng giác. Điểm M thuộc góc phần tư nào thì ta áp dụng bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác.

Giá trị lượng giác	Góc phần tư			
	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-



❖ Ví dụ 1. Xác định dấu các biểu thức:

a) $A = \sin 50^\circ \cdot \cos(-100^\circ)$.

b) $B = \sin 195^\circ \cdot \tan \frac{20\pi}{7}$.

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ Ví dụ 2. Xác định dấu các biểu thức:

a) $A = \cot \frac{2\pi}{5} \cdot \sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

b) $B = \cos \frac{4\pi}{5} \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot \tan \frac{4\pi}{3} \cdot \cot \frac{9\pi}{5}$.

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

✧ **Bài 2.** Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $A = \cos(\alpha + 90^\circ)$.

b) $B = \sin(\alpha + 80^\circ)$.

🗨️ **Lời giải.**

✧ **Bài 3.** Cho $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $A = \sin(270^\circ - \alpha)$.

b) $B = \cos(2\alpha + 90^\circ)$.

🗨️ **Lời giải.**

✧ **Bài 4.** Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $A = \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{5}\right)$.

b) $B = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{8}\right)$.

🗨️ **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Bài 5.** Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $A = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

b) $B = \sin\left(\alpha + \frac{1119\pi}{2}\right)$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Bài 6.** Cho tam giác ABC . Xét dấu của biểu thức $P = \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ trong các trường hợp:

a) Tam giác ABC là tam giác nhọn.

b) Tam giác ABC là tam giác tù.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

📁 **Dạng 2. Tính giá trị lượng giác của một cung**

Để tính giá trị lượng giác của 1 cung ta dựa vào các hằng đẳng thức lượng giác:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Ngoài ra, cần phải xác định dấu của các hàm số lượng giác của cung đó.

❖ **Ví dụ 1.** Biết $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tính giá trị của $\cos \alpha$ và $\tan \alpha$.

💬 **Lời giải.**

--	--

❖ **Bài 5.** Cho $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, tính giá trị của biểu thức $M = \frac{2 \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha - 4 \cos^2 \alpha}{5 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$.

 **Lời giải.**

--	--

Dạng 3. Sử dụng cung liên kết để tính giá trị lượng giác

Sử dụng công thức các cung có liên quan đặc biệt.

❖ **Ví dụ 1.** Tính các giá trị lượng giác của góc $\alpha = \frac{2017\pi}{3}$.

 **Lời giải.**

--	--

❖ **Ví dụ 2.** Cho $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Tính $\sin \left(\alpha - \frac{3\pi}{2} \right)$.

 **Lời giải.**

--	--

❖ **Ví dụ 3.** Rút gọn biểu thức $A = \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + \cos (2\pi - x) + \cos (3\pi + x)$.

 **Lời giải.**

--	--

❖ **Ví dụ 4.** Cho tam giác ABC , chứng minh rằng $\sin(A + B + 2C) = -\sin C$.

 **Lời giải.**

❖ Ví dụ 5. Tính giá trị của biểu thức $B = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 180^\circ$.

💬 Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

❖ Bài 1. Cho $\tan(\pi + x) = 1 - \sqrt{2}$ với $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

💬 Lời giải.

❖ Bài 2. Tính giá trị của biểu thức $A = \sin \frac{7\pi}{6} + \cos 9\pi + \tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + \cot \frac{7\pi}{2}$.

💬 Lời giải.

❖ Bài 3. Rút gọn biểu thức $D = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$.

💬 Lời giải.

❖ Bài 4. Rút gọn biểu thức $A = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức: $A = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 4. Chứng minh rằng: $\frac{2 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = 3 \tan^2 \alpha + 2$.

💬 Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

❖ Bài 1. Rút gọn biểu thức $M = \frac{4 \cos^2 x - 2}{\sin x + \cos x}$.

💬 Lời giải.

❖ Bài 2. Rút gọn biểu thức $N = \sqrt{\sin^2 x (4 + \cot x) + \cos^2 x (1 + 3 \tan x)}$.

💬 Lời giải.

❖ Bài 3. Rút gọn biểu thức $C = (\tan x - \cot x)^2 - (\tan x + \cot x)^2$.

💬 Lời giải.

❖ Bài 4. Rút gọn biểu thức $B = 3 \left[(\sin^4 x)^2 - (\cos^4 x)^2 \right] + 4 \left[(\cos^2 x)^3 - 2 (\sin^2 x)^3 \right] + 6 \sin^4 x$.

💬 Lời giải.

BÀI 3. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A – CÔNG THỨC CỘNG

Dạng 1. Công thức cộng

Để giải các bài toán liên quan đến các công thức cộng, ta thường sử dụng các công thức sau:

$$a) \sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a.$$

$$c) \tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}.$$

$$b) \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b.$$

❖ Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos 10^\circ + \cos 11^\circ \cos 21^\circ + \cos 69^\circ \cos 79^\circ$.

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức:

$$a) A = \frac{\sqrt{2} \cos a - 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + a \right)}{-\sqrt{2} \sin a + 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + a \right)}.$$

$$b) B = (\tan a - \tan b) \cot(a - b) - \tan a \tan b.$$

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 3. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \cos a + \sin a = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - a \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + a \right).$$

$$b) \cos a - \sin a = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + a \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - a \right).$$

💬 Lời giải.

❖ Ví dụ 4. Cho tam giác ABC , chứng minh rằng $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$.

💬 Lời giải.

◀ ▶ **Bài 4.** Tính

a) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, biết $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

b) $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, biết $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

c) $\cos(a+b)$, $\sin(a-b)$, biết $\sin a = \frac{4}{5}$, $0^\circ < a < 90^\circ$ và $\sin b = \frac{2}{3}$, $90^\circ < b < 180^\circ$.

💬 **Lời giải.**

◀ ▶ **Bài 5.** Chứng minh rằng

a) $\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b}$.

b) $\frac{\cos(a-b)}{\cos(a+b)} = \frac{\cot a \cot b + 1}{\cot a \cot b - 1}$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....

⇔ **Bài 9.** Cho $a + b = \frac{\pi}{4}$, chứng minh rằng $(1 + \tan a)(1 + \tan b) = 2$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....

⇔ **Bài 10.** Cho tam giác ABC , chứng minh rằng $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

B – CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

⇔ **Định lí 3.1 (Công thức góc nhân đôi).** Với mọi giá trị của góc lượng giác α cho trước, ta có

- ☑ $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.
- ☑ $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$.
- ☑ $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}, \begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

Hệ quả 3 (Công thức hạ bậc). Với mọi giá trị của góc lượng giác α cho trước, ta có

- ☑ $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.
- ☑ $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$.
- ☑ $\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Hệ quả 4 (Công thức nhân ba). Với mọi giá trị của góc lượng giác α cho trước, ta có

$$\heartsuit \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

$$\heartsuit \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

(Chứng minh lại khi sử dụng trong bài tập tự luận)

🗨️ Lời giải.

$$\begin{aligned} a) \sin 3\alpha &= \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin \alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha = \sin \alpha(1 - 2\sin^2 \alpha) + 2\sin \alpha \cos^2 \alpha \\ &= \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha + 2\sin \alpha(1 - \sin^2 \alpha) = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \cos 3\alpha &= \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha = \cos \alpha(2\cos^2 \alpha - 1) - 2\sin^2 \alpha \cos \alpha \\ &= 2\cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha. \end{aligned}$$

□

C - CÁC DẠNG TOÁN

📁 Dạng 2. Tính các giá trị lượng giác của các góc cho trước

Sử dụng công thức nhân đôi hoặc hạ bậc để tính giá trị lượng giác theo yêu cầu.

🔗 **Ví dụ 5.** Tính các giá trị lượng giác của góc $\alpha = 22^\circ 30'$.

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

🔗 **Ví dụ 6.** Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, với $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tính giá trị của $\sin 2\alpha$ và $\tan 2\alpha$.

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

📁 Dạng 3. Rút gọn biểu thức cho trước

Sử dụng công thức nhân đôi hoặc hạ bậc kết hợp việc đánh giá quan hệ bội chặn giữa các cung và các bậc.

❖ **Ví dụ 7.** Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ.$

b) $B = \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x.$

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

📁 **Dạng 4. Chứng minh đẳng thức lượng giác**

Sử dụng công thức nhân đôi hoặc hạ bậc kết hợp việc đánh giá quan hệ bội chặn giữa các cung và các bậc.

❖ **Ví dụ 8.** Chứng minh các đẳng thức sau trong điều kiện có nghĩa của biểu thức

a) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha$

b) $\frac{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} = \cot \alpha$

c) $\frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} = \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Ví dụ 9.** Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x

$$P = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x.$$

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

✦ Bài 11. Cho biết $\tan \frac{a}{2} = 2$. Hãy tính giá trị biểu thức: $P = \frac{\tan a + \cot a}{2 \tan a - 4 \cot a}$.

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....

✦ Bài 12. Cho $\tan x = \frac{\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y} - \sqrt{1-y}}$. Chứng minh rằng $y = \sin 2x$.

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....

✦ Bài 13. Rút gọn $A = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$.

💬 Lời giải.

.....
.....

✦ Bài 14. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ$.

b) $B = \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9}$.

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....



.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 15.** Tính giá trị của $\sin 18^\circ$ và $\cos 18^\circ$.

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 16.** Chứng minh các đẳng thức sau đây (trong điều kiện có nghĩa của biểu thức):

a) $\tan x = \frac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos x + \cos 2x}$.

b) $\tan^2 x = \frac{2 \sin 2x - \sin 4x}{2 \sin 2x + \sin 4x}$.

c) $\sin^4 x + \cos^4 x - 6 \sin^2 x \cos^2 x = \cos 4x$.

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 17.** Cho góc α thỏa $\cos 4\alpha = \frac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin^6 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^6 \alpha$.

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Bài 18.** Rút gọn biểu thức $A = \sin^5 \alpha \cos \alpha - \cos^5 \alpha \sin \alpha$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 19.** Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến số x .

a) $A = 8 \sin^4 x + 4 \cos 2x - \cos 4x - 3$.

b) $B = \frac{\tan 2x}{\tan x} - \frac{1}{\cos 2x}$.

💬 **Lời giải.**

D – CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI

📁 Dạng 5. Biến đổi một biểu thức thành một tổng hoặc thành một tích

Đây là dạng toán cơ bản chủ yếu để tập cho học sinh áp dụng được đối với các công thức biến đổi (tổng thành tích, tích thành tổng) đã học. Dưới đây là các công thức biến đổi đó.

1. Công thức biến đổi tích thành tổng

☑ $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$

☑ $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

☑ $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

☑ $\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$

2. Công thức biến đổi tổng thành tích

☑ $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$

☑ $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$

☑ $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$

☑ $\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$

☑ $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$

☑ $\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}$

a) $\cos 5a \sin 3a$

b) $\cos(a+b) \cos a$

c) $2 \cos(a+b) \cos(a-b)$

d) $4 \cos x \cos 2x \cos 3x$

e) $\sin(a-b) \cos(b-a)$

f) $\cos a \cos b \cos c$

g) $4 \sin 2a \sin 4a \sin 6a$

h) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cos 2x$

 Lời giải.

↔ **Bài 21.** Biến đổi mỗi biểu thức dưới đây thành một tích:

a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x$

b) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$

c) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$

d) $\frac{\cos x + \cos y}{\cos x - \cos y}$

e) $\frac{\sin 7x + \sin 5x}{\sin 7x - \sin 5x}$

f) $\sin x \cos 3x + \sin 4x \cos 2x$

g) $\sin a + \sin b + \sin(a+b)$

h) $\cos a + \cos b + \cos(a+b) + 1$

i) $\sin^2 a - \sin^2 b$

j) $1 + \sin a + \cos a$

k) $1 - \cos a + \sin a$

l) $1 - 2 \cos x + \cos 2x$

m) $1 + \sin x - \cos 2x$

n) $\sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x$

o) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x - 1$



 Lời giải.

Two large vertical columns of dotted lines for writing the solution.



A large writing area consisting of two vertical columns of dotted lines for text entry, separated by a central vertical line.



Two large columns of dotted lines for writing, separated by a vertical line.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 24.** Chứng minh giá trị của biểu thức $A = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right)$ không phụ thuộc vào biến số x :

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 25.** Chứng minh rằng các biểu thức dưới đây không phụ thuộc vào giá trị của biến số x .

a) $A = \sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$

b) $B = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x$

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....


Dạng 7. Dùng công thức biến đổi để tính giá trị (rút gọn) của một biểu thức lượng giác

◊ **Ví dụ 15.** Rút gọn biểu thức $A = 2 \sin x (\cos x + \cos 3x + \cos 5x)$.

Từ đó tính giá trị biểu thức $T = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}$


 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

 **Ví dụ 16.** Tính giá trị biểu thức $A = \sin^2 10^\circ + \cos 70^\circ \cos 50^\circ$

 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

 **Ví dụ 17.** Rút gọn các biểu thức sau đây:


a) $A = \frac{\cos 4a - \cos 2a}{\sin 4a - \sin 2a}$

b) $B = \frac{\sin a - 2 \sin 2a + \sin 3a}{\cos a - 2 \cos 2a + \cos 3a}$

 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

 **Bài 26.** Tính giá trị các biểu thức sau đây:



Two large columns of dotted lines for writing solutions.

✧ **Bài 27.** Cho $a = \frac{\pi}{11}$. Hãy tính giá trị của các biểu thức sau đây

a) $A = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a + \sin 5a$

b) $B = \cos 2a + \cos 4a + \cos 6a + \cos 8a + \cos 10a$

c) $C = \cos a + \cos\left(a + \frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(a + \frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(a + \frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(a + \frac{8\pi}{5}\right)$

💬 **Lời giải.**

☑ $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ \Rightarrow \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)$ và $\frac{C}{2}$ phụ nhau, tương tự với $\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)$ và $\frac{A}{2}, \dots$

☑ Các góc A, B, C đều có số đo trong khoảng $(0^\circ; 180^\circ)$

☑ Các góc $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}$ đều là các góc nhọn nên có các giá trị lượng giác đều dương.

🔗 **Ví dụ 18.** Chứng minh rằng ΔABC vuông khi $\sin A \sin C = \cos A \cos C$.

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....

🔗 **Ví dụ 19.** Chứng minh rằng ΔABC cân khi $2 \sin A \sin B = 1 + \cos C$. (1)

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....

🔗 **Ví dụ 20 (ĐH Ngoại ngữ Hà Nội-1995).** Cho ΔABC với diện tích S và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Chứng minh rằng:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \frac{2S}{R^2}.$$

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

🔗 **Ví dụ 21.** Cho ΔABC . Chứng minh rằng

$$a \sin(B - C) + b \sin(C - A) + c \sin(A - B) = 0.$$

💬 Lời giải.

⇨ **Bài 31 (ĐH Đà Nẵng 1997).** Chứng minh rằng ΔABC vuông khi

$$\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B \sin C}. \quad (1)$$

💬 **Lời giải.**

⇨ **Bài 32.** Cho a, b, A, B khác không và $aB + bA \neq 0$ sao cho

$$\frac{\sin(x - \alpha)}{\sin(x - \beta)} = \frac{a}{b}, \quad \frac{\cos(x - \alpha)}{\cos(x - \beta)} = \frac{A}{B}.$$

Chứng minh rằng: $\cos(\alpha - \beta) = \frac{aA + bB}{aB + bA}$.

💬 **Lời giải.**



.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 44.** Tính: $P = \cos 12^\circ + \cos 18^\circ - 4 \cos 15^\circ \cdot \cos 21^\circ \cdot \cos 24^\circ$

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 45.** Cho $\triangle ABC$ tùy ý với ba góc đều là nhọn. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$.

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

◊ **Bài 46.** Chứng minh: $8 + 4 \tan \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{16} + \tan \frac{\pi}{32} = \cot \frac{\pi}{32}$.

Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Bài 47.** Cho $\cos x = \frac{3}{4}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $\sin y = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < y < \pi$. Hãy tính

$\cos 2x$, $\sin 2x$, $\sin 2y$, $\cos 2y$, $\cos(x+y)$, $\sin(x-y)$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 48.** Chứng minh rằng

$$a) \quad \sin 3x = \sin x (4 \cos^2 x - 1);$$

$$b) \quad \sin 4x = \sin x (8 \cos^3 x - 4 \cos x).$$

💬 **Lời giải.**

⇔ **Bài 52 (ĐH Đà Nẵng-1998).** Chứng minh rằng

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

 **Lời giải.**

⇔ **Bài 53 (ĐHQG Hà Nội-1995).** Chứng minh rằng:

$$\tan 30^\circ + \tan 40^\circ + \tan 50^\circ + \tan 60^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cos 20^\circ.$$

 **Lời giải.**

BÀI 4. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG VI

A – ĐỀ SỐ 1A

❖ **Câu 1 (1,0 điểm).** Một đường tròn có bán kính 30 cm. Tìm độ dài của các cung có số đo lần lượt là $\frac{\pi}{15}$ và 36° .

💬 Lời giải.

.....
.....
.....

❖ **Câu 2 (2,0 điểm).** Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xác định dấu của các giá trị lượng giác sau:

a) $\sin(\alpha - \pi)$;

b) $\cos\left(\frac{17\pi}{2} + \alpha\right)$.

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....

❖ **Câu 3 (3,0 điểm).** Tìm $\sin x, \cos x, \cot x, \sin 2x, \cos 2x$ và $\tan 2x$ biết $\tan x = \frac{4\sqrt{11}}{7}$ và $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$.

💬 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Câu 4 (3,0 điểm).** Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{\sin^2 x(1 + \cot x) + \cos^2 x(1 + \tan x)}$;

b) $B = \frac{2 \sin(a + b)}{\cos(a + b) + \cos(a - b)}$.

🗨️ **Lời giải.**

⇨ **Câu 5 (1,0 điểm).** Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có ba góc A, B, C thỏa mãn $\sin A = \cos B + \cos C$ thì tam giác ABC vuông.

🗨️ **Lời giải.**

B – ĐỀ SỐ 1B

⇨ **Câu 1 (1,0 điểm).**

a) Đổi số đo của góc 18° sang đơn vị radian.

b) Đổi số đo của cung $\frac{3\pi}{20}$ sang độ, phút, giây.

c) Cho đường tròn có bán kính 15cm. Tìm độ dài của cung có số đo $\frac{\pi}{6}$.

 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Câu 2 (2,0 điểm).** Cho $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Xác định dấu của các giá trị lượng giác sau:

a) $\sin(\alpha - 12\pi)$;

b) $\tan\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)$.

 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Câu 3 (3,0 điểm).**

a) Cho $\tan x = -3$. Tính $A = \frac{5 \sin x + 4 \cos x}{6 \sin x - 7 \cos x}$.

b) Tính $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ biết $\cos x = -\frac{4}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

 Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

❖ **Câu 4 (3,0 điểm).** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $B = \cos\left(\frac{2017\pi}{2} - a\right) \sin\left(\frac{2017\pi}{2} - b\right) - \sin(a - b)$.

b) $C = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x$.

 Lời giải.



.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Câu 5 (1,0 điểm).** Cho tam giác ABC có ba góc A, B, C thỏa mãn $2 \sin A \sin B = 1 + \cos C$. Hỏi tam giác ABC là tam giác gì?

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

C-ĐỀ SỐ 2A

⇨ **Bài 1 (2,0 điểm).** Cho $\tan a = \frac{4}{3}$ ($\pi < a < \frac{3\pi}{2}$). Tính $\sin 2a$; $\tan \left(2a - \frac{\pi}{4}\right)$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Bài 2 (2,0 điểm).** Chứng minh đẳng thức: $\frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} + \frac{\sin x + \cos x}{1 - \tan^2 x} = \sin x + \cos x$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Bài 3 (2,0 điểm).** Chứng minh biểu thức: $A = \sin^2 x + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} + x \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$ không phụ thuộc vào x .

🗨️ **Lời giải.**

⇨ **Bài 4 (2,0 điểm).** Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sin 3x + \sin 2x + \sin x}{2 + \cos x - 2\sin^2 x}$.

🗨️ **Lời giải.**

⇨ **Bài 5 (2,0 điểm).** Trong tam giác ABC , chứng minh rằng :
 $\sin^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 2 - 2\cos A \sin B \sin C$.

🗨️ **Lời giải.**

D - ĐỀ SỐ 2B

⇨ **Bài 1 (2,0 điểm).** Cho $\tan a = \frac{3}{4}$; $\left(\pi < a < \frac{3\pi}{2} \right)$. Tính $\sin 2a$; $\tan \left(2a + \frac{\pi}{4} \right)$.

🗨️ **Lời giải.**



↔ **Bài 5 (2,0 điểm).** Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng: $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$.

 **Lời giải.**

.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....

↔ **Bài 3 (3,0 điểm).** Không sử dụng máy tính, hãy tính:

a) $\sin 2025^\circ$.

b) $\cos \frac{11\pi}{24} \cdot \cos \frac{5\pi}{24}$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

↔ **Bài 4 (2,0 điểm).** Tính giá trị các biểu thức $P = \frac{3 \sin a - 5 \cos a}{\sin^3 a + \sin a \cos^2 a + 3 \cos^3 a}$, biết $\cos a = \frac{2}{3}$ và $-\frac{\pi}{2} < a < 0$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

↔ **Bài 5 (1,0 điểm).** Cho tam giác ABC bất kì với ba góc ở đỉnh là A, B, C . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{3} \cos B + 3(\cos A + \cos C)$$

💬 **Lời giải.**



.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Bài 3 (3,0 điểm).** Không sử dụng máy tính, hãy tính:

a) $\cos 2025^\circ$.

b) $\sin \frac{11\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24}$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Bài 4 (2,0 điểm).** Cho góc α thỏa mãn: $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ và $\sin \alpha - 2 \cos \alpha = 1$. Tính $P = 2 \tan \alpha - \cot \alpha$.

💬 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇨ **Bài 5 (1,0 điểm).** Cho tam giác ABC có các góc A, B, C thỏa mãn hệ thức:

$$2 \cos A \sin B \sin C + \sqrt{3} (\sin A + \cos B + \cos C) = \frac{17}{4}$$

Hỏi tam giác ABC có đặc điểm gì?

💬 **Lời giải.**

⇨ Câu 2 (4,0 điểm).

- a) Tính giá trị $\cot 135^\circ$ (không sử dụng máy tính).
- b) Tính các giá trị lượng giác khác của α biết $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ ($180^\circ < \alpha < 270^\circ$).
- c) Cho $\tan \alpha = -2$, tính giá trị của biểu thức $A = \frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - 3 \sin \alpha}$.

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇨ Câu 3 (4,0 điểm).

- a) Chứng minh các biểu thức $A = \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x}$ độc lập với x .
- b) Rút gọn biểu thức $B = \sin(x + y) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin(-y)$.
- c) Chứng minh rằng $\cos^4 x + \sin^4 x - 6 \sin^2 x \cos^2 x = \cos 4x$.

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

⇨ Câu 4 (1,0 điểm). Rút gọn biểu thức $A = 3(\sin^8 x - \cos^8 x) + 4(\cos^6 x - 2 \sin^6 x) + 6 \sin^4 x$.

🗨️ Lời giải.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

H – ĐỀ SỐ 4B

❖ Câu 1 (1,0 điểm).

- a) Trên đường tròn lượng giác có gốc A , hãy biểu diễn điểm M thỏa mãn cung AM có số đo $k\frac{\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- b) Xác định dấu của biểu thức $P = \cot \frac{3\pi}{5} \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right)$.

💬 Lời giải.

❖ Câu 2 (4,0 điểm).

- a) Tính giá trị $\tan 150^\circ$ (không sử dụng máy tính).
- b) Tính các giá trị lượng giác khác của góc 15° biết $\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$.
- c) Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Tính giá trị của $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$ theo m .

💬 Lời giải.

❖ Câu 3 (4,0 điểm).

- a) Chứng minh các biểu thức $A = 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x)$ độc lập với x .

⇨ **Bài 2 (2,0 điểm).** Cho $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ với $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tìm các giá trị lượng giác còn lại.

🗨️ Lời giải.

.....

.....

.....

⇨ **Bài 3 (2,0 điểm).** Tính $A = \frac{\cot \alpha + \tan \alpha}{\cot \alpha - \tan \alpha}$ khi $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

🗨️ Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

⇨ **Bài 4 (2,0 điểm).** Tính giá trị đúng của biểu thức $A = \frac{5 \sin^4 \alpha - 3 \sin^2 \alpha - 2}{1 + \sin^2 \alpha}$ khi $\tan \alpha = \sqrt{2013}$.

🗨️ Lời giải.

.....

.....

.....

.....

⇨ **Bài 5 (3,0 điểm).** Cho ΔABC thỏa mãn $\sin \frac{A}{2} \cdot \cos^3 \frac{B}{2} = \sin \frac{B}{2} \cdot \cos^3 \frac{A}{2}$.
Chứng minh rằng ΔABC cân.

🗨️ Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

⇔ **Bài 1 (1,0 điểm).**

- a) Trên đường tròn có bán kính bằng 20cm. Tìm độ dài của cung có số đo bằng 15° .
 b) Xác định dấu của biểu thức sau $A = \sin 50^\circ \cdot \cos(-30^\circ)$

 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....

⇔ **Bài 2 (2,0 điểm).** Chứng minh rằng $3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) - 2(\sin^6 \alpha + \cos^4 6\alpha) = 1$ với mọi góc α .

 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....

⇔ **Bài 3 (2,0 điểm).** Đưa tổng sau về dạng tích $S = \sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x$.

 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....

⇔ **Bài 4 (2,0 điểm).** Rút gọn $A = \sin^2(45^\circ + \alpha) - \sin^2(30^\circ + \alpha) - \sin 15^\circ \cdot \cos(15^\circ + 2\alpha)$?

 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....
.....

⇔ **Bài 5 (3,0 điểm).** Chứng minh rằng ΔABC vuông $\Leftrightarrow \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1$.

 **Lời giải.**

.....
.....
.....
.....



.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....